

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

А.И. Малеханов

Лекции по теории антенных систем

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по специальностям
10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»,
10.05.07 «Противодействие техническим разведкам»,
11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»
и направлениям подготовки 03.04.03 «Радиофизика»,
02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижегород

2021

УДК 621.396.67(075.8)

ББК 32.845я73

М 18

М 18 Малеханов А.И. ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ АНТЕННЫХ СИСТЕМ:
Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород. – 2021. – 117 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор кафедры статистической радиофизики и
мобильных систем связи **А.Г. Флакман**

В настоящем пособии изложены вопросы, составляющие основу теории антенных систем – раздела радиофизики, имеющего широкую область физических и технических приложений. Цель лекционного курса – познакомить студентов с базовыми задачами теории антенн и методами их решения. Особое внимание уделяется анализу физических аспектов теории и возможностям ее практического использования, для чего изложение теоретических вопросов сопровождается разбором модельных задач и количественными оценками.

Основной материал курса делится на две взаимодополняющие части, которые посвящены прямой и обратной задачам теории антенн. Первая часть посвящена методам расчета диаграммы направленности и связанных с ней характеристик антенны по заданному распределению поля на ее апертуре, вторая часть – методам нахождения поля на антенне (синтеза антенны) по заданной диаграмме направленности. В заключительной части курса кратко рассмотрены задачи статистической теории антенных систем, касающиеся анализа влияния флуктуаций в антенне на ее направленные свойства.

Пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по специальностям 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», 10.05.07 «Противодействие техническим разведкам», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы» и направлениям подготовки 03.04.03 «Радиофизика», 02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е. З. Грибова**

УДК 537.86

ББК 32.845я73

© А.И. Малеханов

© Нижегородский государственный
университет им Н.И. Лобачевского, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Краткий обзор курса	4
(лекция 1)	
1. Прямая задача теории антенн	11
(лекции 2 – 6)	
1.1. Постановка прямой задачи. Метод решения и основные приближения. Зоны излучения антенны: ближняя, волновая, дальняя зоны	11
1.2. Диаграмма направленности и связанные с ней характеристики антенны	26
1.3. Влияние амплитудно-фазового распределения на диаграмму направленности антенны. Примеры расчетов	34
2. Синтез антенн как обратная задача теории антенн	48
(лекции 7 – 15)	
2.1. Постановка обратной задачи. Необходимое условие существования точного решения	48
2.2. Точные методы синтеза антенны	51
2.3. Приближенные методы синтеза антенны	63
2.4. Сверхнаправленные антенны. Регуляризация сверхнаправленных решений задачи синтеза антенны	85
3. Статистическая теория антенн	106
(лекция 16)	
3.1. Краткий обзор задач статистической теории антенн	106
3.2. Влияние флуктуаций фазового распределения на диаграмму направленности антенны	109
Заключение	115
Список литературы	116

ВВЕДЕНИЕ

Лекция 1. Краткий обзор курса

Первая лекция является вводной и содержит краткий обзор того материала, который будет изложен в последующих лекциях. В свое время, когда формировался этот курс, он был курсом по выбору для студентов магистратуры, и такой обзор делался специально для того, чтобы студенты имели возможность лучше определиться со своим выбором. Все последние годы этот курс входит в учебный план перечисленных выше специальностей как обязательный, но традиция обзорной лекции осталась, поскольку такой обзор представляется полезным вне зависимости от числа и категории слушателей.

Основная идея построения данного курса заключается в том, чтобы дать общее представление студентам факультета о той науке, которая есть теория антенн. Наука эта весьма обширна, поскольку обширны и разнообразны области ее применения и практического использования антенн для разного типа волн (электромагнитных, акустических), самых разных диапазонов, в самых разных средах. Радиолокация воздушных объектов и гидролокация подводных объектов, астрономия в различных диапазонах электромагнитных волн, беспроводная связь (также в разных вариантах и диапазонах), разнообразные задачи диагностики различных объектов и систем (в технике, промышленности, медицине) – это только некоторые из примеров тех актуальных областей науки и техники, которые не обходятся без использования антенн как инструментов решения конкретных задач. В силу такого разнообразия представляется целесообразным выделить те основополагающие разделы, которые составляют своего рода «несущую конструкцию» всей теории антенн, и остановиться на них более подробно, хотя и без многих деталей.

В качестве такой несущей конструкции выбраны три внутренне взаимосвязанных направления теории антенных систем. Это, по порядку: (1) прямые и (2) обратные задачи ТАС для регулярных антенн (без учета каких-либо «паразитных» флуктуаций) и затем те же задачи, но (3) в статистической постановке, т.е. с учетом возможных флуктуаций тех характеристик антенны или окружающей ее среды распространения волн, которые в регулярной постановке предполагаются детерминированными. По существу, это и есть те три «кита», на фундаменте которых за последние несколько десятков лет было воздвигнуто многоэтажное здание современной антенной науки.

Эти несколько десятков лет, если более конкретно – период после 2-й Мировой войны. Именно в ходе этой смертоносной войны было отчетливо понято, насколько это важная область науки и техники – радиолокация и, соответственно, антенны, которые ее воплощают в жизнь. Необходимость становления и быстрого развития в стране радиолокации и всей радиопромышленности привела к образованию в Горьковском университете первого в стране радиофизического факультета (1945 г.), а затем таких же факультетов и в ряде других вузов страны. Хочется надеяться, что студенты факультета неплохо знают историю своей *alma mater*, и потому подчеркнуть связь этой замечательной истории с тематикой данного курса представляется совсем нелишним.

Итак, первый раздел курса мы посвятим знакомству с *прямой задачей* ТАС.

В самом общем и неформальном виде эта задача формулируется как вопрос о том, для чего вообще нужна антенна и чем она принципиально отличается от «неантенны», т.е. от излучателя или приемника сигналов, размер которого меньше (и даже много меньше) соответствующей длины волны. Многие из студентов хорошо знают (особенно те, кто посещает кафедру военной подготовки), что это отличие состоит прежде всего в том, что у антенны есть *направленность*, которая, в свою очередь, есть свойство антенны формировать поле излучения (если речь об излучающей антенне) в определенном угловом диапазоне или (если речь о приемной антенне) – иметь наибольший отклик на сигналы, приходящие из определенных направлений, и тем самым осуществлять селекцию сигналов по углам их приходов. Таким образом, антенна имеет направленность и способна осуществлять угловую селекцию поля излучения (или отклика на сигналы внешних источников), в то время как точечный (в смысле малости в сравнении с длиной волны) излучатель (или приемник) такой способностью в принципе не обладает и излучает во все углы (принимает со всех направлений) равномерно.

Чтобы в дальнейшем не отвлекаться на те (весьма важные) аспекты, которые касаются излучения или приема волновых сигналов, мы будем ориентироваться на *задачу излучения*, т.е. задачу формирования поля определенной (хотя и произвольной) частоты, отвечающей рабочему диапазону частот антенны, в окружающем ее пространстве. Физическая «начинка» и, тем более, техническая реализация задач излучения и приема волновых сигналов, очевидно, сильно различны, но теоретический аппарат, как и антенная терминология, во многом схожи и даже одинаковы. По ходу дела иногда будут делаться оговорки, касающиеся специфики задач излучения и приема сигналов, но только в тех случаях, где это наиболее важно.

За отмеченное нами свойство направленности, присущее антеннам, «отвечает» особая их характеристика – *диаграмма направленности* (ДН). Уже по названию видно, что ДН есть функция угловых координат, и эта функция как раз и показывает в явном виде, каким именно образом комплексная амплитуда поля излучения антенны зависит от угла – в каких направлениях поле оказывается максимальным или близким к нему, а в каких – минимальным и даже нулевым. Соответственно, угловое распределение мощности излучения также оказывается сильно неравномерным. Для антенн больших волновых размеров, т.е. для тех, размер которых составляет большое количество длин волн и для которых есть смысл говорить не просто об антеннах, но об *антенных системах*. Тогда ясно, что ДН антенных систем оказывается сильно «изрезанной» функцией и, что наиболее важно для большинства приложений, основной максимум этой функции оказывается сильно доминирующим над остальными и имеет при этом малую угловую ширину. Это означает, что подавляющая часть излучаемой мощности такой антенны оказывается сосредоточенной вокруг некоторого угла в весьма узком диапазоне углов, в то время как в других углах распределение мощности – фон бокового излучения – оказывается относительно малым (но при этом тоже сильно неравномерным, как правило). На качественном уровне, все эти соображения относительно ДН студентам должны быть уже хорошо известны и понятны.

С ДН антенны связан целый ряд других характеристик, которые есть ее параметры или непосредственно определяются через ДН. С ними мы познакомимся подробно, но первые две, фактически, уже названы. Это направление главного максимума ДН – тот угол, в направлении которого формируется максимум излучаемой мощности, и его угловая ширина, которая показывает «остроту» главного максимума. В теории и технике антенн главный максимум и окружающие его боковые максимумы ДН стандартно называют *лепестками*. Таким образом, типичная ДН антенны, на длине которой укладывается много длин волн выбранного частотного диапазона, имеет ярко выраженную многолепестковую структуру с доминирующим и узким главным лепестком. Для приемных антенн с этими параметрами ДН связано важное понятие *разрешающей способности*, которое вводится в контексте селекции сигналов близко (по углу) расположенных источников. Очевидно, что чем главный лепесток ДН уже, тем разрешающая способность антенны выше, т.е. приемные антенны больших волновых размеров потенциально имеют высокую разрешающую способность (для этого они и создаются).

Возвращаясь к общей, но уже более формализованной постановке прямой задачи ТАС, мы можем теперь сказать более четко, что она собой представляет по существу. Итак, *прямая задача ТАС есть задача расчета ДН антенны по заданному пространственному распределению поля на ее апертуре (излучающей поверхности), которая также известна (задана)*.

Анализ прямой задачи мы начнем с задачи расчета поля, создаваемого антенной с известной функцией распределения амплитуды и фазы поля при условии, что апертура антенны является плоской. Такая антенна представляет собой площадку произвольной, но известной формы, на которой задано непрерывное пространственное распределение комплексной амплитуды поля – оно стандартно называется *амплитудно-фазовым распределением* (АФР) антенны. Требуется найти угловое распределение поля, создаваемого заданной плоской антенной в окружающем ее пространстве.

Такая «плоская» постановка, в качестве исходной, выбрана исключительно потому, что в несколько другом виде она уже хорошо известна студентам. Речь идет о классической задаче физики волновых процессов – о дифракции плоской волны (в общем случае – неоднородной волны) на отверстии известной формы в непрозрачном (для данной волны) экране. По сути своей, это действительно «родственная» задача, поскольку то волновое поле, которое проходит сквозь отверстие, создает в его плоскости некоторое АФР, которое есть начальное АФР с точки зрения дальнейшего распространения волнового поля в полубесконечном пространстве за экраном. За исключением деталей, связанных с возможным «затеканием» дифрагирующего поля на теневую сторону экрана и появлением там вторичных источников, все выглядит точно так, как для плоской антенны, апертура которой совпадает с данным отверстием в экране. Таким образом, краткое воспоминание об этой классической задаче волновой физики даст нам все необходимое для рассмотрения прямой задачи ТАС – постановку, метод решения, основные приближения, основные выражения.

Задание студентам: в качестве подготовки к следующей лекции вспомнить задачу дифракции плоской волны на отверстии в непрозрачном экране и метод ее решения. Вспомнить физический смысл и значение таких важных определений, как параметр Френеля, ближняя зона, зона Френеля, зона Фраунгофера (дальняя зона).

После анализа прямой задачи для плоской антенны и получения всех необходимых выражений, связывающих угловую зависимость поля излучения с распределением поля на самой антенне, мы обратимся к приближенному и весьма простому выражению, которое отвечает большим удалениям от антенны – именно тем, которые означают попадание точки наблюдения поля в *дальнюю зону* антенны. Что значит «большие удаления», каков количественный критерий дальней зоны? На этих вопросах мы остановимся отдельно, поскольку это не умозрительный, но практически важный вопрос: насколько далеко нужно удалиться от антенны известного волнового размера, чтобы оказаться в ее дальней зоне и пользоваться для расчета ее ДН наиболее простым выражением? Качественно, ответ на него в точности такой, как в задаче дифракции, и ключевой безразмерный параметр, который здесь возникает – *параметр Френеля* – здесь тот же самый, но количественные уточнения необходимы нам для конкретного ответа. Рассмотрение этого вопроса будет сопровождаться несложными количественными оценками для разных диапазонов длин волн, в том числе, для диапазона электромагнитных волн СВЧ диапазона, который широко используется в радиолокации.

Затем мы упростим задачу и обратимся к еще более простому выражению связи ДН антенны с ее АФР, предельно упростив саму антенну – перейдем к случаю *линейной антенны*, т.е. антенны в виде линейного отрезка заданной длины и, соответственно, заданного волнового размера (отношения его длины к длине волны). Весь последующий материал курса будет ограничен именно этим случаем.

Важный практический вопрос, который далее будет рассмотрен на основе полученного решения прямой задачи для линейной антенны, заключается в следующем: как можно управлять ДН и ее ключевыми параметрами? Ответ вполне очевиден – для этого нужно управлять АФР антенны и перестраивать его так, чтобы ДН менялась нужным образом. Но если более конкретно? За какие именно параметры ДН «отвечает», к примеру, амплитудное распределение антенны, а за какие – фазовое? Ответы на эти вопросы будут также сопровождаться простыми количественными оценками и примерами.

После этого, достаточно разобравшись с прямой задачей и накопив полезную интуицию относительно влияния АФР антенны на ДН, мы обратимся к *обратной задаче* ТАС. Она является обратной в буквальном смысле, поскольку формулируется обратно по отношению к прямой задаче. Теперь известной предполагается ДН, которую мы хотим получить с помощью антенны заданной геометрии, а найти требуется АФР, которое обеспечит (реализует) заданную ДН. В более общем варианте постановки обратной задачи, геометрия антенны тоже заранее не определена и ее нужно найти, но мы такой общей постановки касаться не будем и ограничимся той, когда геометрия антенны известна и по-прежнему она задана как наиболее простая, в виде линейного отрезка.

Таким образом, *обратная задача ТАС есть задача расчета АФР антенны известной геометрии по заданной ДН*. Естественно, что уравнение связи АФР и ДН антенны остается тем же самым (а другому взаться просто неоткуда), и, по-прежнему, это уравнение относится к дальней зоне антенны. Но сама постановка задачи, действительно, обратная и теоретически, и практически. По существу, речь здесь идет о задаче *синтеза антенны* – так она и называется в антенной литературе.

Первое, с чего мы начнем рассмотрение задачи синтеза антенны, будет ответом на принципиальный вопрос: всегда ли существует *точное решение* этой задачи? Другими словами, для любой ли заданной ДН мы получим АФР, которое обеспечит точное ее воспроизведение? Но если не для любой, значит, нужно понять следующее: какие условия (ограничения) нужно наложить на ДН для того, чтобы обеспечить возможность ее точной реализации с помощью заданной антенны?

Очевидно, раз такие вопросы поставлены, то не все так просто с обратной задачей, и какие-то ограничения действительно существуют. Именно в этом – в появлении ограничений на саму возможность точного решения – заключается принципиальное различие прямой и обратной задач. В прямой задаче сложности могут возникнуть только расчетного плана: если функция АФР или геометрия антенны сложные, то расчет ДН такой антенны ожидаемо оказывается не столь простым делом. Но это трудности «технические» (вычислительные), а в данном случае речь идет о самой возможности существования точного решения.

Разобрав этот вопрос и поняв, в чем его физический смысл (он весьма простой, на самом деле), мы обратимся к методам получения *точного* решения задачи синтеза: если оно существует, то надо суметь его найти.

Известны два основных метода точного решения задачи синтеза антенны – метод интеграла Фурье (этот интеграл хорошо знаком студентам сразу по нескольким курсам) и метод парциальных (т.е. частных) ДН. Очевидно, оба они должны быть «завязаны» на условие существования точного решения и потому тесно взаимосвязаны между собой. Но в практических расчетах удобнее может оказаться какой-то один из них, это обычно зависит от вида заданной ДН. Для иллюстрации, будут рассмотрены примеры решения задачи синтеза линейной антенны обоими методами.

Несмотря на то, что после всего этого мы будем уже весьма продвинуты с точки зрения анализа обратной задачи, остается все же невыясненным вопрос: а что делать в ситуации, когда заданная ДН не удовлетворяет условию существования точного решения? И зачем вообще такие ДН задавать? Или такой практический вариант постановки задачи: заданная ДН может быть реализуема точно, но само решение для АФР нам, как разработчикам антенны, представляется слишком сложным и потому мы намерены его несколько упростить, а значит, отказаться от точного воспроизведения заданной ДН. Тогда у нас в рассмотрении оказываются две диаграммы – заданная ДН и та реальная ДН, которую мы получаем с помощью нашей антенны, заранее зная, что они не совпадают в точности. Насколько можно сблизить эти две ДН, т.е. получить хорошее приближение реальной ДН к заданной? И что значит «хорошее приближение» в этом случае, чем его количественно характеризовать? Видно, что тут есть серьезные вопросы для обсуждения, и мы найдем на них ответы.

Итак, речь в такой постановке идет о *приближенном решении* задачи синтеза антенны и, соответственно, *приближенных методах* синтеза. Ясно, что это должны быть какие-то другие методы, отличные от точных, поскольку сама постановка задачи теперь существенно отличается от постановки точного синтеза. Более того, теперь и само точное решение для АФР антенны может рассматриваться нами как частный случай приближенного решения, т.е. как решение задачи синтеза именно в той ситуации, когда заданная ДН удовлетворяет нужному условию, и мы не отказываемся от точной реализации такого АФР, а это значит, что реальная ДН совпадает с заданной. По существу, при этом будет дан ответ на принципиальный вопрос о практических возможностях синтеза антенны с учетом тех ограничений, которые мы должны учитывать при постановке этой задачи. Прежде всего, ограничений на размер антенны – он может быть большим и даже очень большим, но заведомо не может быть бесконечно большим. Именно с этим качественным ограничением, как мы увидим, связаны ограничения на возможности реализации заданной ДН.

Отмеченные выше прямые и обратные задачи ТАС будут изложены в *детерминированной* постановке, т.е. без учета возможных флуктуаций и разного рода случайных ошибок в реализации антенны. Это, своего рода, «классика жанра» в теории антенн. С этих задач начиналась ТАС как самостоятельный раздел радиофизики, и они во многом завершены к настоящему времени (во всяком случае, для относительно простых вариантов геометрии антенны, не говоря уже о простейшей линейной антенне).

Но очевидно, что появление каких-либо флуктуаций может быть неизбежным на практике, и поэтому нужно понимать, к чему они могут привести. В заключение курса мы кратко познакомимся с относительно современным разделом ТАС, который получил название *статистической теории антенн*. Уже из названия ясно, что речь идет об учете статистических эффектов, а именно, об анализе влияния флуктуаций в антенне на ее направленные свойства. Каких именно флуктуаций? – самых разных по своей природе. Флуктуировать может амплитудное или фазовое распределения антенны (коэффициенты передачи в антенных трактах, к примеру), геометрия антенны (вследствие вибраций или каких-либо других случайных «искривлений»). Очевидно, что особенно важным этот аспект становится для антенных комплексов больших волновых размеров, которые являются весьма сложными техническими системами и содержат большое количество различных устройств и элементов, обеспечивающих их функционирование. Интуитивно понятно, что флуктуации и разного рода случайные ошибки в создании АФР антенны приведут только к негативному эффекту, и ДН может только «испортиться», но лучше точно не станет. К этому направлению относятся также вопросы, связанные с учетом флуктуаций в среде распространения создаваемых антенной сигналов – тех флуктуаций, которые приводят к случайной изменчивости показателя преломления среды и, следовательно, к случайным амплитудно-фазовым искажениям поля излучения антенны. Физически очевидно, что влияние статистических эффектов растет с ростом удаления точки наблюдения от антенны, поскольку они «накапливаются» с дистанцией и потому в дальней зоне антенны могут оказаться весьма существенными, даже критически важными.

Таким образом, статистическая теория антенн – практически важный раздел ТАС, и потому хотя бы краткое знакомство с ним необходимо.

Задачи статистической теории антенн также делятся на прямые и обратные задачи. Прямая задача здесь сводится к расчету статистических характеристик ДН (средней ДН, средних значений и дисперсии ее параметров) при заданных статистических характеристиках АФР, ее геометрии или среды распространения. По существу – к оценке влияния возможных флуктуаций, если они допускаются или реально существуют, на ослабление направленных свойств ДН в сравнении с детерминированным случаем. В свою очередь, обратная задача сводится к тому, чтобы с учетом известной статистики АФР или геометрии антенны рассчитать то регулярное (в смысле среднего значения) АФР, которое обеспечит реализацию заданной ДН в пределах заданного отклонения от нее. Обратные задачи статистической теории антенн весьма сложные для краткого знакомства и потому обсуждаться нами практически не будут, но основные эффекты в рамках прямой задачи мы рассмотрим и сделаем это для наиболее важного случая, когда флуктуирующим оказывается фазовое распределение антенны. Как правило, именно этот случай оказывается практически наиболее востребованным для анализа, поскольку фазы сигналов наиболее чувствительны к разного рода флуктуациям параметров антенны и (или) окружающего ее пространства. В свою очередь, и сама ДН также более «чувствительна» к флуктуациям фазового распределения, чем амплитудного. Смысл этого утверждения легко понять из понимания того важного заключения, которое следует из решения прямой задачи: ДН антенны есть результат *интерференции* волновых полей всей совокупности «элементарных» источников, из которых она состоит.

Наконец, краткое вводное замечание касается списка литературы по данному курсу. К настоящему времени издано большое количество монографий и учебников по теории антенн, студенты могут пользоваться любыми из них для углубленной подготовки. Те книги, которые приведены в списке, могут рассматриваться как хорошие ориентиры в этом море различных изданий, они прошли проверку временем и стали уже классическими. Все они в той или иной мере использованы автором при подготовке данного курса, необходимые ссылки на конкретные разделы в них и заимствованные рисунки будут даны по ходу изложения материала. Вместе с тем, изложение курса не повторяет и не следует буквально ни одному из известных автору изданий, поэтому студентам предлагается внимательно отнестись к тому, что будет представлено в лекциях, и активно участвовать в обсуждении материала. Тогда, хочется надеяться, знакомство с материалом окажется полезным.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ АНТЕНН

Лекция 2. Постановка прямой задачи. Метод решения и основные приближения

В соответствии с программой курса, рассмотрение задач ТАС мы начинаем с анализа прямой задачи. Ее словесная формулировка уже была приведена в предыдущей лекции: *прямая задача ТАС есть задача расчета диаграммы направленности антенны по заданному амплитудно-фазовому распределению поля на ее апертуре (излучающей поверхности), которая также считается известной (заданной)*. Но если так, то нам нужно сначала определить и понять, что есть ДН как характеристика антенны и что именно понимается под АФР антенны.

Для этого мы обратимся к исходной постановке задачи: задана антенна, про которую мы все знаем, а найти требуется распределение поля антенны в окружающем ее пространстве. Что значит «все знаем про антенну»? Это значит, что нам известны (мы сами их задаем) геометрическая форма (апертура) антенны и распределение поля источников на ней. Известно также, в каком окружающем ее пространстве находится эта антенна – однородном или неоднородном, есть ли там какие-либо отражающие или преломляющие границы раздела и какие они, т.е. нам известно, как «устроена» та среда вокруг антенны, в которой распространяются излучаемые антенной волны. Тогда, очевидно, мы сможем рассчитать (или воспользоваться уже известным) волновое поле, создаваемое каждым из составляющих антенну элементарных источников (то поле, что в теории волн называется функцией Грина) и двигаться дальше по пути расчета поля антенны как совокупности этих элементарных источников. Где-то «по дороге», как можно догадаться, и должна возникнуть та характеристика антенны, которую мы определим как ДН, а что касается АФР, то этот термин мы можем определить уже сейчас, поскольку он относится к заданной антенне.

Итак, *АФР антенны есть распределение комплексной амплитуды поля на ее апертуре* – общепринятый термин в теории и технике антенн. Каждый из элементарных источников, составляющих в совокупности антенну, имеет свою амплитуду и фазу, и тогда АФР есть функция координат этих источников на апертуре. По известному пространственному распределению поля в пределах апертуры мы должны найти неизвестное пространственное распределение поля везде вокруг антенны, на любом от нее удалении и под любым углом к ней.

Что же касается временной зависимости и связанного с ней частотного спектра АФР, то они могут быть произвольными вне зависимости от заданной апертуры и при этом, очевидно, будут непосредственно влиять на аналогичные зависимости поля антенны в пространстве. Если окружающая среда является линейной в смысле распространения в ней волновых полей, то никаких нелинейных искажений спектра АФР не произойдет, хотя могут произойти изменения временной формы излучаемых сигналов в результате дисперсии и (или) частотно-зависимого затухания. Этих вопросов распространения волн в материальной среде мы касаться не будем, и все дальнейшее рассмотрение будем

относить к некоторой произвольной частоте спектра заданного АФР (в общем случае, широкополосного).

Кроме того, прямая и затем обратная задачи ТАС будут рассмотрены нами в *скалярной* постановке. Это не означает, что применительно к векторным электромагнитным полям полученные результаты не будут иметь отношения, но означает только то, что для таких полей они относятся к одной из проекций поля (к любой из них). Следовательно, такая постановка не ограничивает нас в понимании методов решения этих задач и ожидаемых результатов.

Конечно, в самой общей постановке – для произвольной апертуры, в любом окружающем пространстве и в произвольной точке наблюдения – задача расчета поля антенны, даже со всеми сделанными упрощениями, является весьма сложной и, скорее всего, окажется под силу только численным схемам. Поэтому нужно уточнить, прежде всего, о какой именно форме антенны идет речь и какого «типа» окружающее пространство мы предполагаем. И крайне желательно при этом уточнить все это таким образом, чтобы было не слишком сложно дойти до конца, т.е. до тех выражений, которые мы сможем назвать решением поставленной задачи.

С пониманием всех этих соображений мы рассмотрим прямую задачу ТАС на том примере, который должен быть достаточно хорошо известен студентам еще из курса общей физики (оптики) и затем из курса электродинамики. А именно, мы вспомним классическую задачу волновой физики – задачу дифракции плоской волны на отверстии произвольной формы в непрозрачном (для данной волны) экране, который находится в свободном однородном пространстве – без границ раздела, с независимым от координат показателем преломления (студентам было предложено ее вспомнить, хотя бы в общих чертах). Но в чем здесь прямая аналогия с прямой задачей теории антенн и как мы можем использовать уже известные нам результаты в новом «антенном свете»? Ответ кажется очевидным: то отверстие, которое освещает падающая на него волна, есть (в нашей постановке) излучающая апертура, в пределах которой создается некоторое (заданное нами) АФР. В простейшем случае плоской падающей волны это есть «плоское» АФР с постоянной амплитудой и некоторым наклоном фазового фронта, который отвечает углу падения волны на экран. Полупространство, куда распространяется волна в результате дифракции на отверстии, есть то окружающее антенну пространство, которое нас интересует с точки зрения расчета волнового поля в произвольной (по отношению к антенне) точке наблюдения (ясно, что задача излучения в данном случае симметричная, правое и левое полупространства для нас эквивалентны). За исключением деталей, связанных с возможным «затеканием» дифрагирующей волны на теневую сторону экрана, все выглядит точно так, как для плоской антенны, апертура которой точно совпадает с отверстием в экране, которое и есть в данном случае излучающая апертура. Что до отмеченных деталей, то их влияние мы будем считать пренебрежимо малым (на этот счет известны условия Кирхгофа, именем которого назван и общий математический метод решения задачи дифракции).

Итак, речь идет о расчете поля антенны в предположении, что антенна имеет не какую-то произвольную, но плоскую геометрию, т.е. излучающая апертура есть площадка

произвольной, но известной формы, при этом АФР антенны есть произвольная функция своих переменных – координат в плоскости антенны (задача дифракции в общей постановке также не ограничивается случаем именно плоской волны).

Такая постановка задачи иллюстрируется на рис. 2.1. Начало координат совмещено с геометрическим центром антенны, расположенной в плоскости $z = 0$ и имеющей площадь Σ . АФР антенны будем обозначать $F(\xi, \eta)$, где «греческие» координаты совпадают с декартовыми в плоскости антенны: $\xi \equiv x$, $\eta \equiv y$ при $z = 0$ (такое обозначение сделано для удобства, чтобы не путать их с координатами точки наблюдения). Точка наблюдения имеет координаты (x, y, z) (в декартовой системе) или (R, θ, φ) (в сферической системе) в правом полупространстве $z > 0$. Искомое поле в точке наблюдения обозначаем $S(\dots)$, по первой букве слова *signal* (поскольку это в буквальном смысле есть то сигнальное поле, которое создается антенной). Очевидно, что для задачи дифракции этот рисунок отвечает падению волны на непрозрачный экран с отверстием Σ , в пределах которого она создает заданное нами АФР $F(\xi, \eta)$, из полупространства $z < 0$ (слева) и прохождению ее в правое полупространство $z > 0$.

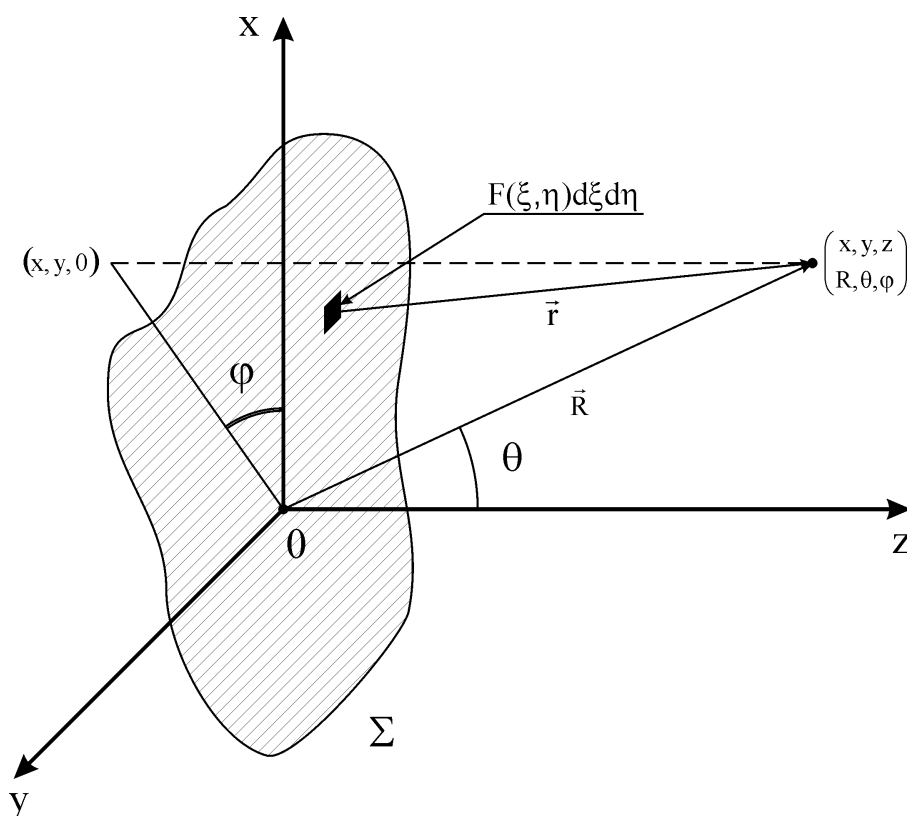


Рисунок 2.1. Иллюстрация к постановке задачи расчета волнового поля, создаваемого плоской антенной (отмечена штриховкой) в окружающем ее пространстве

Хорошо известный метод решения дифракционной задачи, который получил свое окончательное математическое оформление в работах Густава Р. Кирхгофа еще в середине 19-го века – метод Кирхгофа – основан на интегрировании поля и его нормальной производной по поверхности, ограничивающей сферический объем с центром в точке наблюдения, опирающийся на экран (с правой стороны) и захватывающий полностью дифракционное отверстие. Мы не будем сейчас его воспроизводить, но интуитивно

используем то ключевое физическое соображение, которое лежит в основе и самого метода, и анализа явления дифракции в целом – представление о том, что поле в точке наблюдения представляет собой результат интерференции волновых полей, создаваемых всей совокупностью первичных и создаваемых в среде вторичных источников. Эти представления, восходящие к еще более ранним работам Христиана Гюйгенса, Томаса Юнга и Огюстена Френеля, должны быть хорошо известны студентам.

Исходя из этого и опуская несущественные для нас амплитудные множители, запишем поле в точке наблюдения как результат суммирования тех полей, которые создаются элементарными источниками, заполняющими всю поверхность антенны:

$$S\left(\begin{matrix} x, y, z \\ R, \theta, \varphi \end{matrix}\right) = \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} \{...\} d\xi d\eta \quad (2.1)$$

Здесь мы в явном виде учитываем, что:

- 1) каждый из элементарных источников является точечным (имеет размер, много меньший длины волны по обеим координатам: $d\xi, d\eta \ll \lambda$) и, следовательно, создает в окружающем однородном пространстве сферическую волну, свободно (без отражений и преломлений) распространяющуюся в точку наблюдения;
- 2) элементарные источники имеют комплексные амплитуды $F(\xi, \eta)$, которые играют роль весовых множителей, с которыми эти источники вносят свой вклад в суммарное волновое поле в точке наблюдения;
- 3) элементарные источники имеют непрерывное распределение по апертуре антенны, поэтому интерференционное поле в точке наблюдения выражается интегрированием сферических волн от каждого из них по всей площадке Σ .

Отметим, что наше интуитивное соображение относительно выражения (2.1) может быть не до конца точным. Если вспомнить метод Кирхгофа решения дифракционной задачи, то это действительно так, и тогда знание результатов более строгого анализа подсказывает, что выражение под интегралом имеет несколько другой вид – там должен быть еще один, хотя и малосущественный, как правило, сомножитель, который мы пока оставим без уточнения в фигурных скобках, но вспомним про него в следующей лекции.

Для того, чтобы двинуться дальше в целях получения более конкретных расчетных выражений, необходимо уточнить, каким образом поле (2.1) зависит от координат точки наблюдения и нет ли возможности сделать какие-либо обоснованные приближения, позволяющие упростить расчет и довести его до относительно простых формул.

Координаты точки наблюдения в неявном виде присутствуют в радиус-векторах r , которые зависят, очевидно, и от точек их «выхода» из апертуры, и от точки наблюдения. Поскольку радиус-вектор r является гипотенузой прямоугольного треугольника, то для него имеем точные выражения в декартовой и сферической системе координат с учетом их взаимосвязи ($z = R\cos\theta$, $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$), а именно:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 = R^2 - 2x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2, \text{ где } R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.2a)$$

$$r^2 = R^2 - 2R \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) + \xi^2 + \eta^2 \quad (2.2b)$$

Далее, обратим внимание на то, что те координаты, которые характеризуют удаление точки наблюдения от антенны (декартова координата z и сферическая координата R), могут иметь бесконечно большие значения, поскольку мы готовы рассматривать поле антенны на любых, сколь угодно больших расстояниях. С другой стороны, координаты ξ , η , которые определяют заданные источники и по которым мы интегрируем поле (2.1), заведомо имеют ограничения сверху в силу ограниченных размеров антенны. Следовательно, появляется привлекательная возможность выделить в выражениях (2.2) малые параметры и затем воспользоваться соответствующими разложениями по этим малым параметрам. Именно это мы и сделаем, опираясь на хорошо известное приближение $\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\alpha/2$ при малых значениях переменной $\alpha \ll 1$ (согласно разложению корня в ряд Тейлора) и полагая, что $1/R \approx 1/z$ (эти отличия приводят к малым и сугубо амплитудным поправкам, а результат интерференции волн, как хорошо известно, зависит главным образом от их фазовых соотношений):

$$r \approx R - \frac{x\xi + y\eta}{z} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2z^2} \quad (2.3a)$$

$$r^2 = R^2 - 2R \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) + \xi^2 + \eta^2 \quad (2.3b)$$

$$r \approx R - (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \sin \theta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R}$$

В итоге получаем следующие приближенные выражения:

$$S(x, y, z) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) \exp \left\{ ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} \right) - ik \left(\frac{x\xi + y\eta}{z} \right) \right\} d\xi d\eta \quad (2.4a)$$

$$S(R, \theta, \varphi) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) \exp \left\{ ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} \right) - ik \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi) \right\} d\xi d\eta \quad (2.4b)$$

Из этих выражений хорошо видно, что поле в точке наблюдения есть поле точечного источника, помещенного в центр антенны (в начало координат), которое модулируется интегральным множителем, в явном виде зависящим как от АФР антенны и формы ее апертуры, так и от того, где именно по отношению к антенне находится точка наблюдения. Другими словами, мы в явном виде определили то выражение, согласно которому антенна (со своим АФР на заданной апертуре) оказывает влияние на ту сферическую волну, которая приходила бы в точку наблюдения, если бы никакой антенны не было, а был бы только единственный точечный источник в начале координат. Выбор одного из двух выражений (2.4) зависит от того, что именно нас интересует – расчет поля антенны в плоскости, заданной на некотором фиксированном расстоянии от плоскости антенны (при $z = \text{const}$), или на сферической поверхности некоторого фиксированного радиуса (при $R = \text{const}$) в зависимости от угловых координат (θ, φ) . Нас интересуют направленные свойства антенны, так что в дальнейшем мы ограничимся анализом выражения (2.4б).

Отметим, что поскольку изначально мы проводим анализ для некоторой фиксированной частоты спектра АФР, то естественным образом результат (2.4) получился

зависящим от волнового числа k , которое отвечает этой частоте и, соответственно, фиксированной длине волны согласно выражению: $k = 2\pi/\lambda$.

Полученный результат (2.4) может быть дополнительно и заметно упрощен, если пренебречь квадратичными по переменным интегрирования слагаемыми в показателе подынтегральной экспоненты. Действительно, их вклад в фазы тех волн, которые мы интегрируем по апертуре, асимптотически стремится к нулю с ростом удаления точки наблюдения от антенны (при эквивалентных условиях z , $R \rightarrow \infty$), поскольку сами эти переменные ограничены размерами антенны, чем мы уже один раз воспользовались. Если сделать следующий шаг и допустить выполнение условий

$$\frac{k\xi^2}{2R} \ll 1, \quad \frac{k\eta^2}{2R} \ll 1 \quad (2.5)$$

то выражение (2.4б) получит наиболее простой вид – такой, что больше в нем упрощать уже фактически нечего:

$$S(R, \theta, \varphi) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) \exp\{-ik \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)\} d\xi d\eta \quad (2.6)$$

Самое важное в этом выражении то, что интегральный множитель, который модулирует сферическую волну по угловым переменным, не зависит от удаления точки наблюдения от антенны. Другими словами, на больших расстояниях от антенны, когда выполняются условия (2.5) для всех координат по антенне, угловая зависимость поля антенны приобретает универсальный (в указанном смысле) характер и полностью определяется только заданным АФР антенны и формой ее апертуры, но не расстоянием до точки наблюдения. Следовательно, такая зависимость становится важнейшей характеристикой антенны и явно заслуживает отдельного названия – это и есть *диаграмма направленности антенны*:

$$D(\theta, \varphi) = \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) e^{-ik \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

Полученное выражение для ДН имеет вид, весьма напоминающий общий вид преобразования Фурье заданной функции АФР, т.е. операцию построения спектра АФР по двум угловым координатам. Но видно и принципиальное отличие – интеграл Фурье имеет бесконечные пределы, в то время как наш «антенный» интеграл для расчета ДН имеет конечные пределы в соответствии с конечными размерами апертуры. К этому важному обстоятельству мы еще не раз будем возвращаться в дальнейшем.

Вернувшись теперь к выражению (2.4б), мы видим, что и в нем мы можем формально определить ДН как множитель поля сферической волны, но в более общем виде и смысле, поскольку ней сохраняется зависимость от расстояния. Такая характеристика не является «чистой» ДН, зависящей только от угловых координат, но формально она становится таковой для скорректированного АФР $\tilde{F}(\dots)$, к фазам которого добавлено квадратичное (по переменным интегрирования) слагаемое:

$$\tilde{F}(\xi, \eta, R) = F(\xi, \eta) \exp \left\{ ik \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} \right) \right\} \quad (2.8)$$

Ясно, что АФР в таком обобщении само становится не вполне «чистым», поскольку оказывается зависящим не только от координат по самой антенне, но и от расстояния до точки наблюдения – как будто антенна «знает», где именно наблюдается создаваемое ей поле. Тем не менее, формально (математически) такое обобщение сделать можно и тем самым приблизить к антенне ту область, где «работает» определение ДН как функции, зависящей только от угловых координат точки наблюдения.

Итак, подведем промежуточный итог нашего рассмотрения поставленной задачи. Первое, что мы можем заметить – полученные приближенные выражения (2.4), (2.6) имеют в точности тот вид, который уже известен из прошлого знакомства с задачей дифракции. Действительно, выражения (2.4) есть не что иное, как результат расчета поля дифрагирующей волны на некоторых промежуточных расстояниях от экрана, когда точка наблюдения удалена достаточно для того, чтобы воспользоваться приближениями (2.3), но еще не выполняются условия (2.5). В общепринятой терминологии, это есть зона Френеля, в которой дифракционные эффекты становятся уже заметными. В свою очередь, выражение (2.6) есть результат расчета дифракции в более удаленной точке, когда выполняются условия (2.5) для всех точек в пределах апертуры. Это зона Фраунгофера или дальняя зона. Обозначая размеры антенны по осям как L_x , L_y и задавая тем самым ограничения сверху на переменные интегрирования $|\xi| \leq L_x/2$, $|\eta| \leq L_y/2$, получаем оценки сверху:

$$\frac{k\xi^2}{2R} \leq \frac{L_x^2}{\lambda R}, \quad \frac{k\eta^2}{2R} \leq \frac{L_y^2}{\lambda R} \quad (2.9)$$

Таким образом, как и в задаче дифракции, мы видим важную роль безразмерного параметра, который связывает воедино три размерные величины, определяющие ключевые параметры задачи: длину волны, размер антенны, расстояние до точки наблюдения. Этот параметр – параметр Френеля – хорошо известен из курса оптики:

$$\rho = \frac{\lambda R}{L^2} \quad (2.10)$$

Стоящие справа в неравенствах (2.9) величины есть не что иное, как обратные ему величины. Следовательно, условие (2.5) есть условие того, чтобы параметр Френеля для обоих (по обеим осям) размеров антенны имеет большую величину, а это и есть, как известно, условие попадания точки наблюдения в дальнюю зону Фраунгофера:

$$\rho_x = \frac{\lambda R}{L_x^2} \gg 1, \quad \rho_y = \frac{\lambda R}{L_y^2} \gg 1 \quad (2.11)$$

В зоне Френеля этот параметр имеет, соответственно, промежуточные значения $\rho \sim 1$, а на еще более близких к антенне расстояниях, когда параметр Френеля становится малым, мы не имеем возможности корректно упрощать подобным образом исходное выражение для фаз интерферирующих в точке наблюдения источников. Это так

называемая ближняя зона — ближняя настолько, что сделанные выше приближения в ней не работают.

Применительно к антеннам, однако, качественное сравнение параметра Френеля с единицей по типу «много больше», «одного порядка», «много меньше» не является вполне удовлетворительным. Такое сравнение вполне достаточно для анализа и понимания физических эффектов, но при разработке и эксплуатации антенны как технического устройства оно становится слишком «расплывчатым» и требует более четких определений. Необходимо уточнить, какие именно значения параметра Френеля являются «граничными» для того, чтобы пользоваться тем или иным выражением для расчета поля антенны, и прежде всего, выражением (2.7), определяющим ее ДН. Этим мы займемся на следующей лекции.

Лекция 3. Зоны излучения антенны

В конце прошлой лекции мы подошли к вопросу о зонах излучения антенны (для приемных антенн, по аналогии — зонах приема). По существу, этот вопрос, и особенно с учетом близкой физической аналогии с задачей дифракции, не является новым по своей сути, и сами термины — ближняя зона, зона Френеля (промежуточная) и зона Фраунгофера (дальняя) — хорошо знакомы студентам со 2-го курса. Но в теории и технике антенн, в отличие от анализа явления дифракции в курсах общей физики или теории волн, этому вопросу уделяется более детальное внимание, поскольку технические характеристики антенн требуют своего конкретного определения, вплоть до возможности инженерных расчетов. В данном случае, речь идет о расчете зависимости поля антенны от координат точки его наблюдения, а сама эта точка эта может оказаться буквально везде, и тогда разработчики антенны или ее пользователи должны знать, что они «получат» от антенны в произвольной точке пространства и как провести необходимый расчет. А для приемной антенны, соответственно, — знать, какой по величине отклик обеспечит заданная антенна на сигнал точечного источника при его нахождении в некоторой произвольной точке.

Итак, прежде всего — что означает сам термин «зона излучения»? Разумеется, поле, создаваемое антенной, никаких зон (в буквальном смысле) не имеет. Эта терминология относится, по существу, не к самому полю (его амплитуде, фазе, мощности), а к методам нашего расчета этого поля, и еще точнее — к тем приближениям, которые мы сделали при решении поставленной задачи. Именно у таких приближений могут быть и реально есть некоторые и вполне определенные границы их применимости, которые мы сами назначаем для определенности и соотносим с ними координаты точки наблюдения. Далек это точка от антенны или не очень, насколько далеко и что значит «не очень» — это вопрос нашей оценки, чтобы знать, какую именно расчетную формулу использовать и четко понимать при этом, количественно, какие возможные ошибки (погрешности) мы допускаем. В этом, казалось бы, сугубо терминологическом аспекте заключается принципиальный смысл, который следует уяснить: поле антенны меняется плавным образом и не испытывает каких-либо «переходов» через какие-либо «границы»

(в однородном пространстве), но указанные зоны и, соответственно, их границы определены в той теории, которая дает возможность произвести конкретные расчеты. Таким образом, если быть точным, то речь идет не о зонах излучения антенны в буквальном смысле, но скорее о зонах теоретического описания этого излучения и применимости тех или иных расчетных выражений.

Вспомним: что именно мы сделали, чтобы конкретизировать расчет на основе общего выражения (2.1)? Мы сделали разумные упрощения того сомножителя под интегралом, который отвечает полю сферической волны элементарного источника, из совокупности которых состоит антенна. Прежде всего, мы упростили выражение для фазовых набегов волн этих источников в точке наблюдения, понимая свою цель — рассчитать результат их интерференции (см. рис. 2.1). И сделав такие упрощения, предполагая все большее удаление от антенны, мы получили не только несложные выражения (2.4), (2.6) для связи поля в точке наблюдения с полем на самой антенне, но и тот «управляющий» безразмерный параметр — параметр Френеля (2.10) — который регулирует применимость этих приближенных выражений. Но раз так, тогда и ответ на вопрос об определении зон излучения должен быть связан с выбором конкретных значений параметра Френеля для границ этих зон, а они, в свою очередь, — с теми слагаемыми в фазовых набегх элементарных сферических волн, которые мы перестаем учитывать при переходе через эти границы, если удаляемся от антенны, или, напротив, начинаем учитывать, если приближаемся.

Таким образом, вопрос о зонах излучения антенны есть вопрос количественной оценки тех приближений для фазовых набегов kr волн элементарных источников, которые помогли нам получить сначала выражение вида (2.4б) из более общего (2.1), а затем еще более простое выражение (2.6) из (2.4). Ясно, что для количественной меры таких приближений нужна некая общая договоренность относительно того, какие максимальные величины для «отброшенных» при этом фазовых слагаемых считаются допустимыми. Это не вопрос высокой теории, напротив — это вопрос инженерной практики работы с антеннами.

Итак, «антенная» договоренность здесь такая: границы зон приближенного расчета фазовых набегов определяются из условия того, что соответствующие отличия от точной величины $kr(\xi, \eta, R, \theta, \varphi)$ для фиксированной точки наблюдения (R, θ, φ) не превышают величины $\pi/8$.

Это значит, что приближенные выражения (2.3) с точностью до квадратичных по переменным (ξ, η) слагаемых, которые отвечают зоне Френеля, отличаются от точных выражений (2.2) на величину, не превышающую $\lambda/16$. Аналогично, дальнейшее упрощение (2.3) с удержанием в нем только линейных слагаемых, которое отвечает зоне Фраунгофера, делается с той же точностью. Поскольку максимальные значения «отброшенных» слагаемых достигаются при максимальных значениях переменных интегрирования, т.е. на краях антенны, когда $|\xi| \approx L_x/2$, $|\eta| \approx L_y/2$, то для подавляющего числа элементарных источников погрешности приближенного расчета фаз будут еще меньше и даже много меньше назначенной величины $\pi/8$, и потому расчет поля антенны в зависимости от ее АФР оказывается достаточно точным.

Теперь мы можем точно ответить на вопрос, где именно будут расположены границы выделенных нами зон при постепенном удалении точки наблюдения от антенны: сначала граница между ближней и волновой зонами и затем — между волновой и дальней. Другими словами, где начинается зона действия приближенных выражений (2.4) и где она заканчивается, т.е. начинается зона действия еще более простого выражения (2.6).

Прежде чем дать ответ на этот вопрос и получить выражения для «граничных» расстояний и соответствующих им значений параметра Френеля, уточним ту терминологию, которая общепринята в теории и технике антенн. Самая дальняя зона Фраунгофера (в теории дифракции) так и называется — *дальняя зона антенны*, промежуточная зона Френеля — *волновая зона* (термин, возможно, не столь очевидный и даже спорный, поскольку поле антенны является волновым не только в этой зоне, конечно, но и везде), наконец, наиболее близкая к антенне зона — *ближняя зона*.

Наибольший практический интерес и важность для большинства антенных приложений имеет дальняя зона. Количественные оценки, которые мы вскоре получим, покажут, насколько эта дальняя зона может быть реально удалена от антенны, и от чего (от какого параметра) зависит положение ее границы в наибольшей степени. Важно, что расчетное выражение (2.6) для угловой зависимости поля антенны имеет в дальней зоне наиболее простой вид — в нем нет зависимости от расстояния, как мы уже отметили на прошлой лекции. Точнее, эта зависимость есть, она никуда не делась (см. выражение (2.4б)), но в дальней зоне она уже настолько слабая, что ей можно обоснованно пренебречь и полагать, что ДН антенны полностью сформирована в том смысле, что дальнейшее удаление от антенны уже никак не влияет на ДН.

Для наглядности, приведенный в лекции 2 рис. 2.1 заменим более простым рисунком — видом сбоку на плоскую антенну, фиксируя ее размер по вертикальной оси: $|\xi| \leq L_x/2$, $L = L_x$ (рис. 3.1). Предполагая удаление от антенны вдоль оси z , т.е. при малых углах $\theta \ll 1$, найдем сначала левую границу волновой зоны, где она начинается. Для этого нам потребуется уточнить, каким следующим по величине фазовым слагаемым мы пренебрегли в выражении для квадрата радиуса-вектора (2.2б), извлекая из него квадратный корень и используя приближенное выражение (2.3б). Вспомним, что разложение корня в ряд Тейлора имеет продолжение: $(1 + \alpha)^{1/2} \approx 1 + \alpha/2 - \alpha^2/8 + \dots$, где малой и монотонно уменьшающейся с ростом z величиной является переменная:

$$\alpha = \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2} \quad (\text{при } \sin \theta \approx 0)$$

Выделяя здесь слагаемые по степеням ξ и оценивая сверху слагаемое, следующее за квадратичным — им оказывается слагаемое с четвертой степенью, получаем неравенство:

$$\frac{k\xi^4}{8z^3} \leq \pi \frac{L^4}{64\lambda z^3} \leq \frac{\pi}{8} \quad (3.1)$$

Следовательно, левая (ближняя к антенне) граница волновой зоны и отвечающее ей значение параметра Френеля имеют выражения:

$$z_{\text{ВЗ}} = \frac{L}{2} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{1/3}, \quad \rho_{\text{ВЗ}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{2/3} \quad (3.2)$$

Аналогичным образом, оценивая сверху квадратичное по ξ слагаемое и используя тот же критерий его малости для перехода в дальнюю зону, имеем для дальней (правой) границы волновой зоны или для границы дальней зоны:

$$\frac{k\xi^2}{2z} \leq \pi \frac{L^2}{4\lambda z} \leq \frac{\pi}{8}, \quad z_{\text{ДЗ}} = \frac{2L^2}{\lambda} = 2L \left(\frac{L}{\lambda} \right), \quad \rho_{\text{ДЗ}} = 2 \quad (3.3)$$

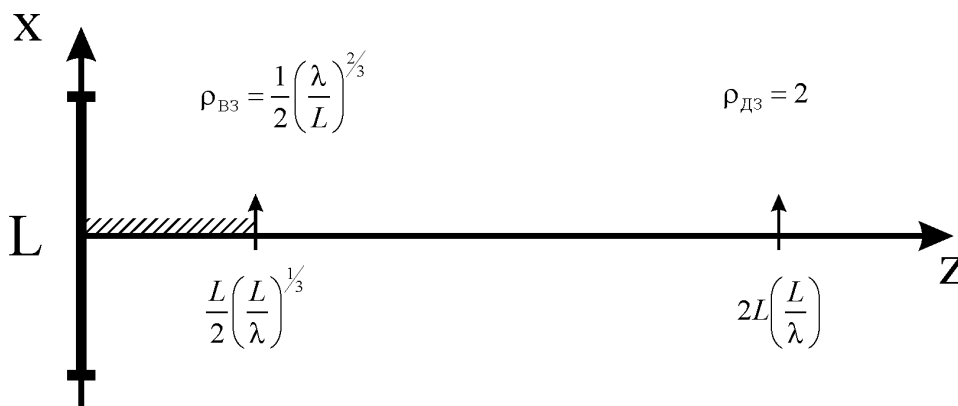


Рисунок 3.1. Границы (отмечены стрелками) ближней, волновой (ВЗ) и дальней (ДЗ) зон излучения антенны вдоль оси z . Сверху приведены соответствующие выражения для параметра Френеля. Штриховкой отмечена ближняя зона

Очевидно, для плоской антенны, имеющей сильно различные волновые размеры по разным осям, границы дальней зоны по разным плоскостям тоже окажутся на сильно различных расстояниях, т.е. двумерная граница дальней зоны как некоторая поверхность в пространстве окажется несимметричной.

Из выражений (3.2), (3.3) и рис. 3.1 хорошо видно, насколько важную роль в определении зон излучения играет размер антенны, отнесенный к длине волны: величина L/λ . Эта безразмерная величина имеет свое общепринятое название – *волновой размер* антенны. В дальнейшем мы увидим, что волновой размер играет принципиальную роль не только при анализе прямой задачи ТАС, но и обратной задачи, т.е. во многих отношениях он является ключевым параметром антенны.

Отметим, что те условия $z \gg L^2/\lambda$, $\rho \gg 1$, которые относятся к качественной оценке границы дальней зоны, при своей количественной оценке оказываются вполне «скромными». Попадание в дальнюю зону антенны означает удаление на расстояние, которое хотя бы в два раза превышает размер антенны, умноженный на ее волновой размер.

Отметим также, что при смещении точки наблюдения от поперечной к антенне оси z под более крутые углы, разница фаз между элементарными источниками, находящимся в центре и на краю апертуры, будет несколько больше. Это означает, что полученные нами границы по удаленности от центра антенны имеют угловую зависимость — чем

больше угол θ , тем на большее расстояние R требуется уйти, чтобы остаться в зоне действия тех же ограничений для разницы фаз, а значит, и соответствующие границы тоже будут несколько дальше от антенны.

Сделаем теперь несложные оценки для того, чтобы лучше почувствовать, как «работают» полученные нами выражения в практических ситуациях.

Возьмем для примера типичную антенну радиолокационной станции СВЧ диапазона, работающей на длине волны 1 см (рабочая частота 30 ГГц), имеющей размер антенного зеркала 3 метра (волновой размер равен 300). Получаем, что волновая зона такой антенны простирается от $z_{вз} = 10$ м до $z_{дз} = 1,8$ км. Ближе 10 метров (примерно три размера антенны) все сделанные нами приближения работают плохо (дают слишком большую погрешность в расчете поля), а при удалении свыше ~ 2 км начинает работать выражение (2.6), позволяющее рассчитать ДН (2.7).

Если та же станция переходит на субсантиметровый диапазон с длиной волны 0,3 см, то волновой размер антенны возрастает в обратной пропорции (теперь он равен 1000), а соответствующие границы заметно отодвигаются: до 15 метров и 6 км, соответственно, при этом размер волновой зоны также возрастает – она становится более протяженной примерно в те же три раза. Очевидно, разрешающая способность антенны с точки зрения локации удаленных воздушных целей тоже становится выше вслед за волновым размером, но для формирования более «острой» ДН (2.7) теперь необходимы большие дистанции.

Другой пример относится к совсем другой области применения антенн — к оптической астрономии. Очевидно, для решения астрономических задач требуется гораздо более высокое угловое разрешение, чем в радиолокации, поэтому и волновые размеры современных оптических телескопов оказываются рекордными в сравнении со всеми другими антеннами. Один из крупнейших в мире (и самый крупный в стране) оптический телескоп работает в Специальной астрофизической обсерватории Российской академии наук (САО РАН) на Северном Кавказе (пос. Нижний Архыз), диаметр его зеркала составляет 6 м. Поскольку речь идет об оптическом диапазоне, возьмем для простоты оценок длину волны 0,6 мкм, следовательно, имеем волновой размер такого телескопа на уровне 10^7 (!) Тогда получаем: $z_{вз} = 600$ м, $z_{дз} = 1,2 \times 10^8$ м. Видно, что граница дальней зоны «уехала» на гигантское расстояние, которое даже трудно себе представить — на ~ 120 тыс. км. Но в действительности, оно совсем небольшое с точки зрения решения тех задач, для которых создаются подобные уникальные антенные системы. Для сравнения: расстояние от Земли до Луны составляет ~ 400 тыс. км, т.е. полученная нами оценка «не дотягивает» даже до Луны, хотя задачи такой телескоп решает совсем другого масштаба — он «рассматривает» звезды и туманности, которые находятся, очевидно, неизмеримо дальше. Следовательно, все интересующие такую антенну объекты находятся в ее дальней (можно даже сказать, в «сверхдальней») зоне.

Конечно, подобные примеры требуют некоторых уточнений, касающихся учета сферической формы антенных зеркал, но для представления о порядках интересующих нас величин они не столь важны. Принципиально важно другое, как мы видим: характеризуя размеры антенны, недостаточно указывать ее физические размеры (в миллиметрах, метрах и т.п.) без указания на то, о каких длинах волн идет при этом речь.

Для более наглядного представления о том, как «устроены» зоны излучения, построим границы этих зон на плоскости безразмерных переменных: волнового размера L/λ (по оси абсцисс) и удаления от антенны, отнесенного к размеру антенны z/L (по оси ординат). В этих переменных границы волновой/ближней зон и дальней/волновой зон определяются выражениями:

$$\frac{z_{\text{ВЗ}}}{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{1/3}, \quad \frac{z_{\text{ДЗ}}}{L} = 2 \left(\frac{L}{\lambda} \right). \quad (3.4)$$

Указанные переменные по осям будем откладывать в логарифмическом масштабе, который удобен не только тем, что позволяет «уложить» на рисунок большой диапазон изменения переменных, но и тем, что все степенные зависимости становятся линейными. Кроме того, отсчет обеих переменных начнем не с нуля, а с единицы: $z/L, L/\lambda \geq 1$ (в логарифмическом масштабе это как раз и будет точкой начала координат). Сами границы, в силу их прямолинейности, легко построить по точкам, выбрав для этого, к примеру, значения: $L/\lambda = 8$, $L/\lambda = 10^3$, $L/\lambda = 1$, $L/\lambda = 50$. Результат такого построения зон излучения приведен на рис. 3.2.

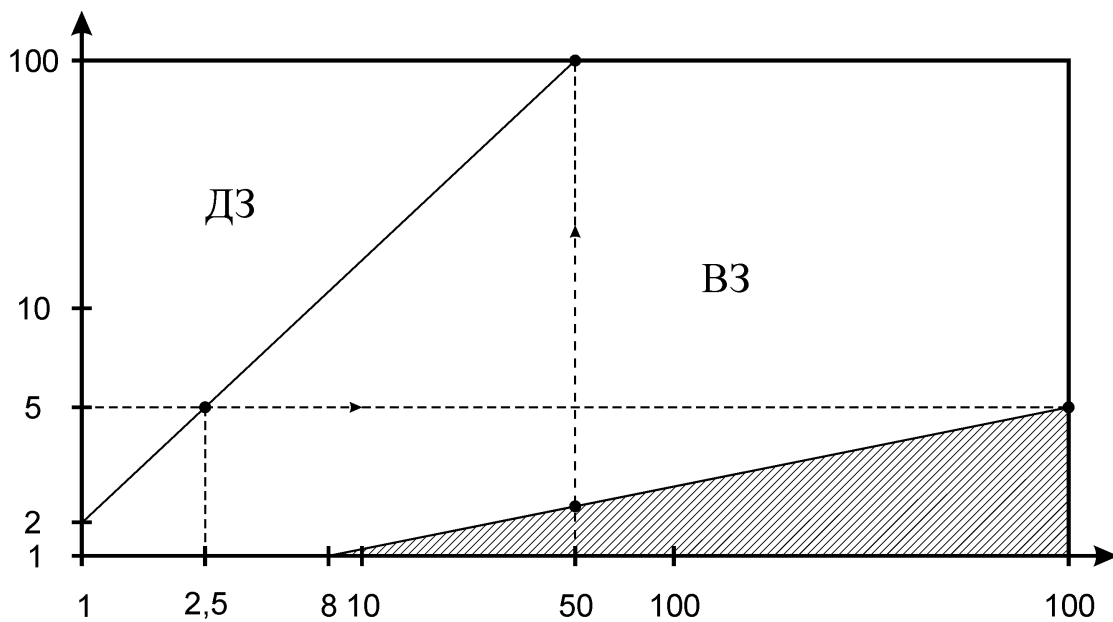


Рисунок 3.2. Зоны излучения на плоскости параметров L/λ (ось абсцисс) и z/L (ось ординат). Штриховкой отмечена ближняя зона без учета реактивного поля (см. также рис. 3.1)

Пользоваться таким рисунком для ответа на вопрос о том, в какой зоне находится точка наблюдения поля антенны при тех или иных значениях указанных переменных, легко и наглядно. Например, фиксируя значение волнового размера $L/\lambda = 50$, начинаем двигаться в сторону удаления от антенны: при $z/L = 2$, попадаем в волновую зону, а затем, при пересечении границы $z/L = 100$, переходим в дальнюю зону (это движение

отмечено вертикальным пунктиром). Наоборот, если мы фиксируем расстояние от антенны, например, $z/L = 5$, и начинаем двигаться по оси волнового размера, то мы тем самым отвечаем на другой вопрос — какой волновой размер соответствует попаданию точки наблюдения в ту или иную зону. Очевидно, что вначале мы оказываемся при этом в дальней зоне (малый волновой размер — значит, дальняя зона оказывается близко), которая заканчивается при $L/\lambda = 2.5$, затем двигаемся в волновой зоне до значения $L/\lambda = 10^3$ и только после этого оказываемся в ближней зоне (это движение отмечено горизонтальным пунктиром). Таким образом, ближняя и дальняя зоны меняются здесь местами в том смысле, что теперь нам нужно иметь достаточно большой волновой размер антенны, чтобы ближняя зона «дотянулась» до заданного расстояния, кратного размеру антенны.

Несмотря на отмеченную наглядность и удобство рис. 3.2, в нем есть, однако, одно «подозрительное» место — область малых значений обеих переменных. Получается, что при волновых размерах $L/\lambda \leq 8$ ближней зоны как будто нет вовсе, а волновая зона «начинается» слишком быстро. Складывается впечатление, что рисунок не завершен, и в нем чего-то явно не хватает именно в этой начальной области. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Действительно, все наши соображения относительно зон и их границ касались исключительно приближенных выражений для фазовых набегов сферических волн в исходном уравнении (2.1). При его написании, что было сделано интуитивно и без вывода, было отмечено, что оно является приближенным (не вполне строгим). Знание более точного выражения, следующего из метода Кирхгофа решения дифракционной задачи, подсказывает, что оставленный без внимания сомножитель в фигурных скобках содержит слагаемое $\sim 1/r$, который имеет более сильную (быстрее затухающую) зависимость от расстояния, чем расходящаяся сферическая волна. «Отложенное» нами выражение в фигурных скобках имеет вид:

$$\{...\} \sim k \left(1 + \frac{i}{kr} \right). \quad (3.5)$$

Отметим, и это важно, что сделанное теперь уточнение коснулось и размерности всего подынтегрального выражения, которое теперь становится безразмерным (с учетом появления здесь волнового числа и интегрирования по ξ, η), но при условии, что заданная функция АФР исходно является безразмерной. В дальнейшем мы будем предполагать именно такие АФР, не касаясь вопроса о конкретной реализации антенны и, соответственно, способа создания и физической природы АФР на ее апертуре (очевидно, они могут быть весьма различными). Это придаст нашему рассмотрению вопросов теории антенн наиболее универсальный характер.

Но если учитывать (3.5), то результирующее поле в точке наблюдения представляет собой сумму двух слагаемых (интеграл суммы есть сумма интегралов). Одно из них есть то, с которым уже разобрались в смысле получения приближенных выражений (2.4) – (2.7) – оно отвечает единице в скобках. В теории и практике антенн это слагаемое стандартно называется *активным полем* антенны. Второе слагаемое гораздо быстрее

затухает с ростом расстояния от антенны, поскольку все элементарные сферические волны множатся на величину $\sim \lambda/r$. Это слагаемое называется *реактивным полем* антенны. Смысл этих терминов заключается именно в том, что первый из них относится к основной компоненте поля, которую «видно» на больших расстояниях (она и есть распространяющееся волновое поле антенны как результат интерференции волновых полей элементарных первичных источников), в то время как второй термин относится к компоненте, которую следует учитывать только в непосредственной близости от антенны, и она остается «невидимой» (пренебрежимо малой) за пределами этой области.

Тогда, как видим, возникает еще один, независимый от величин фазовых набегов, подход к определению той области, которую мы можем определить как ближнюю зону антенны. А именно, это та область, за пределами которой формально можно не учитывать вклад реактивного поля, хотя строго до нуля оно нигде не спадает, даже на сколь угодно больших расстояниях. Это означает, что и в этом случае надо прийти к некоторой общей и удобной договоренности относительно величины соответствующей погрешности, если мы перестаем учитывать реактивное поле и ограничиваем расчет поля антенны только активным полем. В целом, подход качественно близкий, но сам критерий ближней зоны теперь принципиально другой, поскольку он никак не связан с фазами интерферирующих волн в точке наблюдения.

Таким общепринятым критерием малости реактивного поля по отношению к активному является величина отношения их мощностей на уровне 10^{-2} . Действительно, это малая величина, и потому определение границы ближней зоны по такому критерию явно не вносит заметной ошибки в расчет поля антенны. Из этого условия, учитывая (3.5), несложно получить ограничение сверху на расстояние от антенны: $z \leq 8\lambda$. Важно, что в отличие от двух предыдущих границ по активному полю, эта граница ближней зоны не зависит от размера антенны, что физически кажется вполне ясным: речь идет о некотором упрощении для оценки вклада элементарных источника в интенсивность поля вне связи с их фазами, а размеры антенны влияют как раз на их фазовые «взаимоотношения». В переменных рис. 3.2 мы имеем для нее выражение:

$$\frac{z_{\text{БЗ}}}{L} = 8 \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

После этого нам остается нанести соответствующую прямую на рис. 3.2 и тем самым завершить построение границы ближней зоны, которая теперь приобрела двойной смысл. Новая версия рисунка показана на рис. 3.3. Заметим, что использованный нами фазовый критерий (3.1) для построения этой границы и новый критерий по мощности реактивного поля взаимно согласованы в том смысле, что две соответствующие границы сходятся при этом в одной точке на оси абсцисс: $L/\lambda = 8$.

Подчеркнем еще раз, что построение границ на рис. 3.2, 3.3 начинаются не с нулевых, а с единичных значений своих переменных, поэтому пересечение границ с осью абсцисс отвечает удалению уже на размер антенны. На меньших расстояниях находится сплошная ближняя зона, там оба критерия работают «совместно».

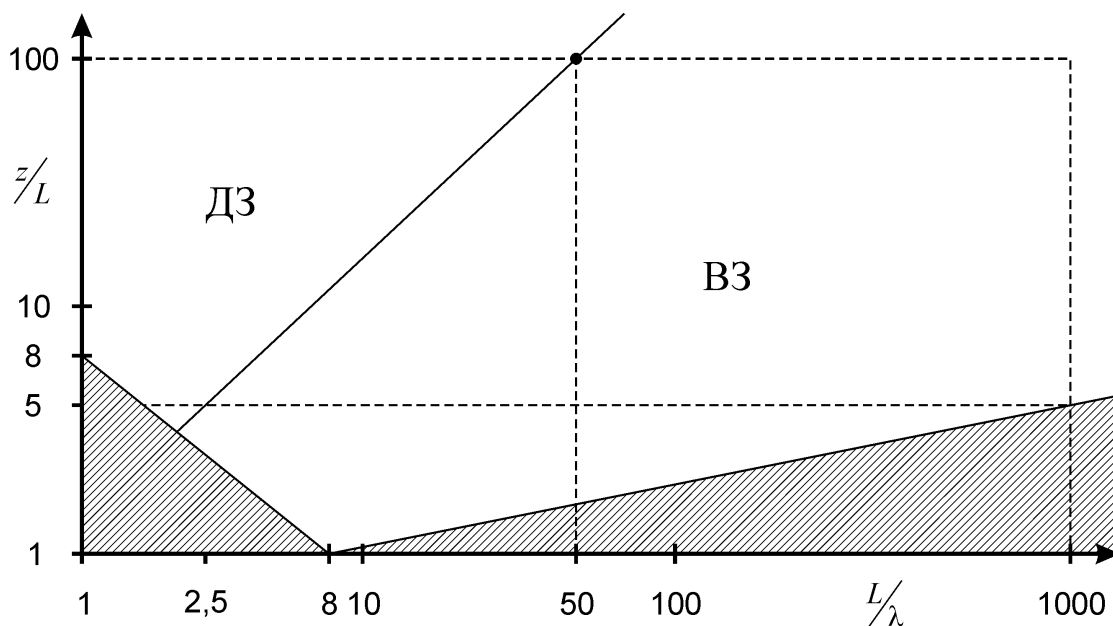


Рисунок 3.3. Зоны излучения с учетом реактивного поля (полная версия рис. 3.2) [5]

Задание студентам:

ответить качественно на вопрос, каким образом изменится положение границ на рис. 3.3 при условии, что их критерии станут более жесткими? К примеру, если ограничить фазовые ограничения величиной $\pi/16$ вместо $\pi/8$ в неравенствах (3.1), (3.3), а отношение мощностей реактивного и активного полей — величиной 10^{-3} вместо 10^{-2} . Другой вариант: если сделать таким фазовый критерий, но смягчить критерий по величине реактивного поля, например, величиной 10^{-1} ?

Лекция 4. Диаграмма направленности и связанные с ней характеристики антенны

После рассмотрения вопроса о том, как находится (рассчитывается) поле антенны в окружающем ее пространстве, остановимся более подробно на ДН антенны как основной характеристике ее направленных свойств.

В случае плоской антенны (см. рис. 2.1) общее выражение для расчета ДН в зависимости от АФР антенны и ее геометрии (размеров и формы апертуры) было получено в лекции 2 – это выражение (2.7). В «чистом виде» ДН представляет собой функцию только угловых координат, потому и имеет такое название. Вместе с тем, сам этот термин может пониматься более широко и тогда он не относится исключительно в дальней зоне, для которой были получены выражения (2.6), (2.7). Такое более широкое толкование ДН будет означать (на это мы уже обратили внимание), что ДН имеет в общем случае зависимость от расстояния до точки наблюдения (расстояния R), и эта зависимость становится тем сильнее, чем меньше это расстояние. Такая обобщенная ДН теряет свою универсальность с точки зрения единого результата на всех расстояниях вдаль, превращаясь в пространственно-угловую зависимость поля, но не чисто угловую.

Данную лекцию мы посвятим анализу ДН в ее стандартном определении, подчеркивая тем самым ее наиболее важную особенность – независимость от расстояния. Практический смысл дальней зоны именно в том и заключается, что с высокой точностью зависимость поля антенны (2.6) от координат точки наблюдения (R, θ, φ) четко факторизуется (разделяется) на два сомножителя. Один из них зависит только от расстояния, и это есть поле точечного сферического источника, помещенного в начало координат (в центр антенны), а другой – только от угловых координат (θ, φ) , и это есть ДН. Приведем здесь снова выражение (2.7) как определение ДН в «плоской» постановке прямой задачи ТАС:

$$D(\theta, \varphi) = \iint_{\Sigma} F(\xi, \eta) e^{-ik \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta, \quad (4.1)$$

$$D_{\max}(\theta_0, \varphi_0) = 1, \quad 20 \lg D_{\max}(\theta_0, \varphi_0) = 10 \lg |D_{\max}(\theta_0, \varphi_0)|^2 = 0$$

ДН стандартно рассчитывается таким образом, чтобы ее максимальное значение удовлетворяло приведенному здесь условию нормировки (в линейном и логарифмическом масштабах). По сути, это условие есть условие на АФР – оно должно быть нормировано соответствующим образом. Отметим также, что приведенное здесь (и ранее) выражение определяет ДН по угловой зависимости комплексной амплитуды поля в точке наблюдения, т.е. *амплитудную ДН*. На практике чаще используется *ДН по мощности*, которая есть квадрат модуля амплитудной ДН.

Сделаем простую и «безобидную» операцию – продлим АФР строго нулевыми значениями за пределы апертуры (площадки Σ). Формально, мы можем это сделать, поскольку в пределах апертуры АФР не изменяется от этого, а нулевые значения АФР во всей плоскости $z = 0$, кроме площадки Σ , никак не исказят поле в точке наблюдения. Таким образом, мы рассматриваем теперь бесконечную плоскую антенну, занимающую всю плоскость $z = 0$, а заданное на ней АФР имеет вид:

$$\Phi(\xi, \eta) = \begin{cases} F(\xi, \eta), & \text{при } (\xi, \eta) \in \Sigma \\ 0, & \text{при } (\xi, \eta) \notin \Sigma \end{cases} \quad (4.2)$$

Зачем мы сделали такую нехитрую и формальную операцию? Только для того, чтобы дать новое, хотя и практически то же самое, выражение для нахождения ДН:

$$D(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta) e^{-ik \sin \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi)} d\xi d\eta \quad (4.3)$$

Именно выражение (4.3) позволяет нам дать ясную физическую интерпретацию ДН. Действительно, в отличие от (4.1), выражение (4.3) буквально совпадает с интегралом Фурье-преобразования функции АФР, а значит, *ДН есть угловой спектр заданного на апертуре АФР*. Если АФР понимать как некоторый «сигнал», заданный на антенне, то ДН есть спектр этого сигнала по тем угловым переменным, которые определяют пространственные частоты поля излучения и являются «дополнительными» к

пространственным переменным (ξ, η) — точно так же, как обычный временной сигнал имеет свой спектр по частотной переменной, которая есть обратное время. Располагая некоторой интуицией относительно того, как выглядит спектр того или иного сигнала конечной длительности, т.е. временного импульса, мы можем «предсказывать» вид ДН по заданному виду АФР. Но если не можем, то расчет ДН по выражениям (4.1)–(4.3) всегда в наших руках — подставим заданное АФР и получим искомую ДН. Несложные примеры таких расчетов мы рассмотрим в следующих лекциях.

Характеризуя ДН как угловой спектр АФР, заданного на апертуре антенны конечных волновых размеров, мы можем дать и несколько другую физическую интерпретацию ДН как результат разложения АФР по плоским волнам, которые, в свою очередь, есть не что иное, как поля элементарных источников, составляющих антенну, в ее дальней зоне. Те сферические волны, которые излучаются этими источниками, в дальней зоне становятся локально плоскими вследствие монотонного роста радиусов кривизны отдельных сферических фронтов, в результате чего точка наблюдения «воспринимает» результат интерференции уже плоских, а не сферических волн. В этом смысле, переход в дальнюю зону означает такое удаление от антенны, когда мы можем сделать такое упрощение (пренебречь сферичностью волновых фронтов) без сколь-нибудь значительной погрешности. Этот смысл дальней зоны в постановке задачи дифракции также хорошо известен студентам из курса общей физики (оптики).

Выражение (4.3) позволяет нам сделать еще одно и очень важное для дальнейшего анализа обратной задачи утверждение. Если воспользоваться общим свойством взаимности Фурье-преобразования, то мы можем заключить, что АФР антенны, в свою очередь, есть спектр ДН, но уже по «своим» переменным – по переменным (ξ, η) . И поскольку область существования АФР фактически ограничена апертурой антенны (в данном случае – площадкой Σ), то мы приходим к следующему выводу относительно общего свойства любой ДН, создаваемой с помощью некоторой заданной антенны: ДН антенны имеет ограниченный (локализованный) спектр, но не по величине, а именно по области своей переменной. Такие функции стандартно называются финитными, и это означает, что *ДН строго есть функция финитного спектра*. К этому важному выводу мы вернемся, когда займемся обратной задачей ТАС.

Прежде чем двинуться дальше, посмотрим, как выглядит типичная ДН и какие в ней есть наиболее характерные особенности.

На рис. 4.1 показана ДН по мощности (квадрат модуля амплитудной ДН (4.1)) одной из РЛС СВЧ диапазона, стоявших в свое время на вооружении армии США (рисунок заимствован из справочника [5]). Хорошо видно, что наиболее выраженная особенность ДН как функции своих переменных – ее сильная неравномерность и резко осциллирующий характер зависимости. При этом, что тоже очень характерно для ДН во многих случаях, четко выделяется область углов, где ДН принимает максимальное значение, которое заметно (в разы и даже на порядки) превышает значения ДН в других максимумах. Эта область так и называется – *главный максимум ДН*, а окружающие его максимумы – *боковые максимумы*, соответственно. Стандартная антенная терминология на этот счет использует понятие «лепестка», и тогда, отмечая подобный осциллирующий характер ДН, говорят о главном и боковых лепестках ДН и самой антенны. Главный

лепесток, очевидно, показывает диапазон углов, в направлении которых происходит преимущественное излучение антенны, намного более интенсивное, чем в другие направления. Видно также, что между максимумами присутствуют глубокие (вплоть до нуля) провалы в ДН. Это означает, что в этих направлениях антенна не излучает. Такие особые точки ДН стандартно называются *нулями ДН*, хотя не всегда эти нули являются строго нулями – вполне достаточно того, что их уровень на десятки дБ ниже уровня главного максимума.

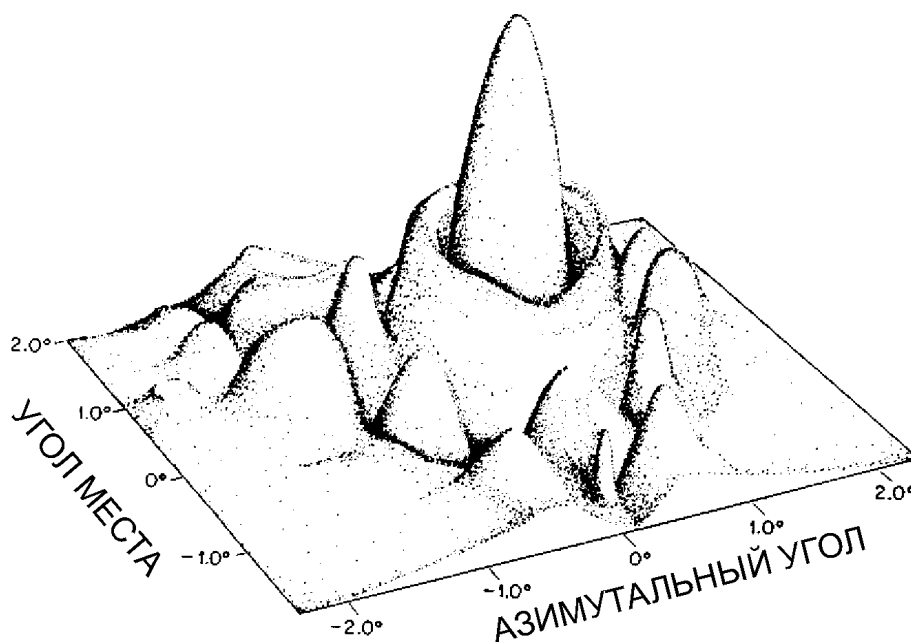
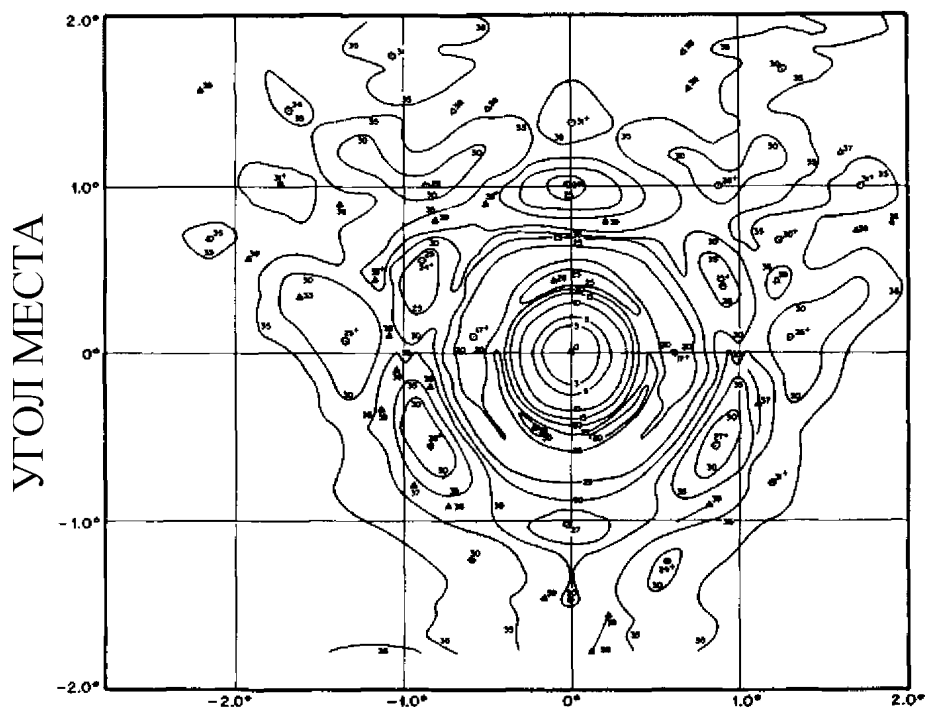


Рисунок 4.1. Типичная диаграмма направленности радиолокационной антенны (РЛС AN/FPQ-6, США) [5]

На рис. 4.2 та же самая ДН представлена иначе – здесь показана «топографическая карта» угловой зависимости поля антенны с указанием уровней спада ее величины по отношению к главному максимуму (уровни приведены на рисунке числовыми значениями в логарифмическом масштабе (в дБ) и при этом они переведены в положительные значения: например, значение ДН, равное -30 дБ по отношению к главному максимуму, отмечено здесь величиной 30). Главный максимум четко виден и здесь (концентрические окружности вокруг значения 0 дБ при нулевых углах) и также хорошо видно, что он явно доминирует над всем своим многолепестковым «окружением». Такой рисунок — тоже весьма наглядная иллюстрация того, что из себя представляют реальные ДН, имеющие сильно выраженную «главную вершину» – главный лепесток, и быстро спадающие с удалением от нее «боковые вершинки».



АЗИМУТАЛЬНЫЙ УГОЛ

Рисунок 4.2. Та же диаграмма направленности, представленная в виде линий равного уровня мощности (значения приведены в логарифмическом масштабе по модулю, дБ) [5]

Таким образом, ДН наглядно иллюстрирует тот факт, что подводимая к антенне мощность перераспределяется в окружающем антенну пространстве таким образом, что в ее дальнем поле формируется сильно осциллирующая зависимость поля излучения от угловых координат точки наблюдения. В одном из направлений формируется главный лепесток излучаемой мощности, в то время как во многих других направлениях излучение весьма мало и даже практически отсутствует. В сравнении с антенной, источник малого волнового размера не обладает возможностью формировать какую-либо заметную угловую зависимость поля излучения и «светит» во все стороны практически равномерно. Аналогично, приемная антенна обладает характерной и значительной избирательностью приема сигналов (плоских волн) от удаленных точечных источников, имеющих различные угловые координаты, в то время как точечный приемник не обладает такой избирательностью и потому не в состоянии обеспечить их угловое разрешение. Следовательно, антенный эффект – формирование ДН – обусловлен именно тем, что антенна как совокупность источников (приемников) имеет определенный волновой размер и, как правило, достаточно большой для того, чтобы ДН антенны обладала отмеченными свойствами.

Очевидно, и это прямо следует из выражений (4.1), (4.3), что конкретный вид ДН полностью определяется заданным АФР (при заданной геометрии антенны). Нет никаких оснований полагать, что главный лепесток всегда будет единственным, как на приведенных рисунках, а минимумы ДН всегда будут иметь нулевые или близкие к ним значения. Возможны самые различные в этом смысле ситуации, и более общим может быть другое утверждение: с ростом волнового размера антенны угловая зависимость поля

антенны в дальней зоне становится более «изрезанной», при этом угловые ширины ее лепестков уменьшаются, а число лепестков – возрастает. При этом следует отметить, однако, что даже для антенн больших волновых размеров можно подобрать такие АФР, что ДН окажется весьма гладкой, без выраженной лепестковой структуры (подобные примеры мы рассмотрим позднее). Но более важно подчеркнуть следующее: в подавляющем большинстве практических задач разработки антенн стремятся именно к такому виду ДН, когда в ней присутствует только один и ярко выраженный главный лепесток, окруженный относительно слабыми боковыми лепестками. Очевидный смысл такого стремления заключается в том, что в этом случае антенна является эффективным концентратором излучения в определенный и весьма узкий интервал углов, в то же время уровень излучения во все другие углы является весьма малым, и чем он меньше, тем лучше.

Для приемных антенн подобный вид ДН означает, что антенна имеет наибольший отклик на приходящие плоские волны только из определенного интервала углов, в то время как с других направлений отклик заметно меньше или даже полностью отсутствует для отдельных направлений. С точки зрения приема полезного сигнала на фоне каких-либо помех, особенно мощных помех, такой вид ДН оказывается наиболее предпочтительным — появляется возможность эффективной угловой фильтрации источников, находящихся в различных направлениях по отношению к антенне. Это означает возможность высокого углового разрешения близко (по угловой координате) расположенных «полезных» источников, и при этом — сильного подавления помех, источники которых расположены за пределами главного лепестка, т.е. возможность высокой помехозащищенности приема полезных сигналов (как правило, именно это и требуется).

Определим теперь и кратко обсудим наиболее важные рабочие характеристики антенны, непосредственно связанные с ее ДН.

1) *Направление главного максимума:* (θ_0, φ_0) .

Смысл этой характеристики (параметра) ДН и самой антенны очевиден: если такой максимум сформирован, то его направление необходимо знать и уметь им «пользоваться», например, изменять его путем соответствующего изменения АФР (примеры будут позже).

2) *Угловая ширина главного лепестка:* $(\Delta\theta)_{0,7}, (\Delta\varphi)_{0,7}$.

Как правило, эта величина определяется на уровне спада амплитудной ДН до уровня 0,7, что эквивалентно спаданию ДН по мощности до уровня 0,5, т.е. в два раза (на 3 дБ). Спадание какой-либо величины до уровня –3 дБ часто используется во многих областях в качестве количественной оценки достаточно сильного изменения измеряемой величины. Поскольку именно ДН по мощности, как правило, интересует потребителей антенных систем, то величина –3 дБ как критерий угловой ширины главного лепестка закрепился в антенной технике. Хотя, конечно, для решения каких-то отдельных задач может оказаться более удобным использовать другие критерии, например, по спаданию главного лепестка до более низкого уровня или даже до нуля.

3) *Уровень боковых лепестков (УБЛ): σ .*

Эта величина определяется как максимальное значение ДН (по модулю) за пределами главного лепестка. Если в ДН присутствует некоторое количество боковых лепестков и они имеют некоторую «иерархию» по величине своих максимумов (как правило, это так), то УБЛ есть уровень наибольшего из них. Если же структура боковых лепестков в ДН не сильно выражена, то в этом случае чаще говорят об уровне бокового излучения, определяя его как среднее по углу значение ДН за пределами главного лепестка. Во многих практических приложениях, на величину УБЛ накладываются определенные ограничения сверху, поскольку относительно высокие значения этого параметра оказываются негативным фактором в оценке функционального качества антенны.

Для иллюстрации данных определений приведен рис. 4.3, на котором показан разрез той же самой ДН (рис. 4.1, 4.2) по одной из угловых координат. Все три параметра ДН отмечены на рисунке соответствующим образом.

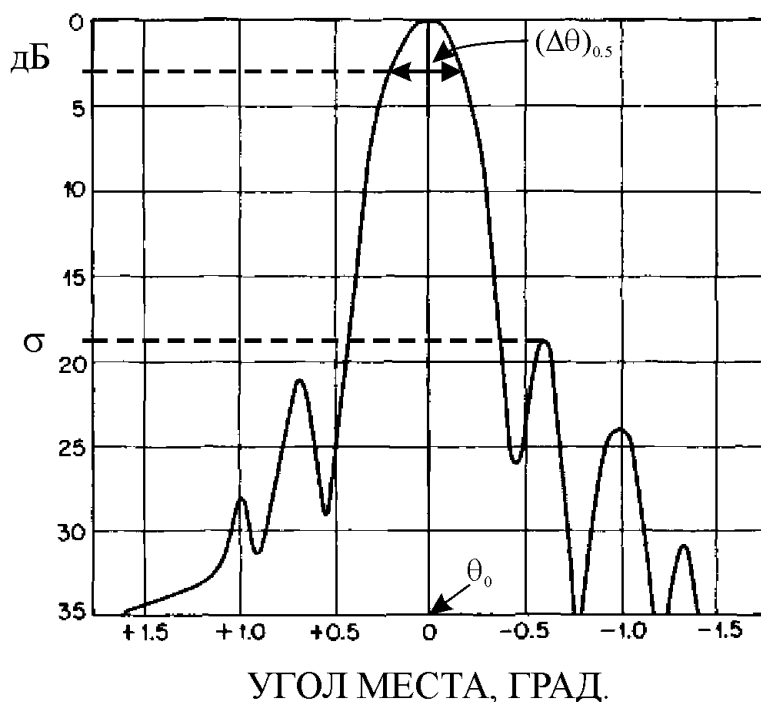


Рисунок 4.3. Разрез показанной выше ДН по углу места θ , позволяющий количественно определить параметры ДН: направление главного максимума θ_0 , угловую ширину главного лепестка по мощности $(\Delta\theta)_{0.5}$, уровень боковых лепестков σ [5]

4) *Коэффициент направленного действия (КНД): $G(\theta, \varphi)$.*

Величина КНД количественно определяет отношение интенсивности поля, создаваемой антенной в некотором (произвольном) направлении (θ, φ) , к средней по полному телесному углу 4π интенсивности поля точечного источника сферической волны при условии равной полной (подводимой к антенне и к источнику) мощности:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{4\pi |D(\theta, \varphi)|^2}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |D(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (4.4)$$

Очевидно, величина КНД имеет ту же самую угловую зависимость, что и ДН по мощности, т.е. «направленное действие» антенны сильно зависит от угловых переменных. Как правило, интерес для практики представляет значение КНД, которое относится к главному максимуму ДН, т.е. максимальный КНД. Его величина есть обратная к средней по полному телесному углу мощность излучения эквивалентного (по полной мощности излучения) ненаправленного источника:

$$G_0 = G(\theta_0, \varphi_0) = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |D(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (4.5a)$$

$$G_0 \approx \frac{4\pi}{(\Delta\theta)_{0.5} (\Delta\varphi)_{0.5}} \quad (4.5b)$$

Второе из приведенных здесь выражений является расчетной оценкой величины максимального КНД, которая работает тем лучше, чем больше волновой размер антенны и, соответственно, меньше угловые ширины главного лепестка по обоим углам (в радианах). Для ДН, показанной на рис. 4.1–4.3, мы можем легко оценить эту величину:

$$(\Delta\theta)_{0.5} \approx (\Delta\varphi)_{0.5} \approx 0,5^\circ \sim 10^{-2}, \quad G_0 \approx 4\pi \times 10^4 \sim 10^5.$$

Как видно, для антенны с подобной ДН максимальный КНД G_0 принимает весьма высокие значения, демонстрируя тем самым основное преимущество антенны в сравнении с ненаправленным излучателем — высокую направленность углового распределения поля излучения. Физическая интерпретация такого высокого направленного действия антенны очевидна: ненаправленный источник равномерно «размазывает» всю подводимую к нему мощность по всем углам, в то время как антенна эффективно, как мы уже отметили, концентрирует мощность в узкий сектор углов. Отсюда и значительный выигрыш антенны по отношению к точечному источнику, если точка наблюдения поля находится как раз в этом секторе, т.е. в области главного максимума ДН.

5) *Эффективная площадь (эффективный размер) антенны: Σ_{eff} .*

С величиной максимального КНД (4.5) тесно связана еще одна важная характеристика, которая показывает, насколько эта величина чувствительна к виду АФР. Известно (это утверждение дается без доказательства), что максимальный КНД зависит от распределения по апертуре модуля АФР $|F(\xi, \eta)|$, которое стандартно называется амплитудным распределением (АР). Известно, кроме того, что максимум величины максимального КНД (4.5) достигается при условии равномерного АР:

$$(G_0)_{\text{max}} = 4\pi \frac{\Sigma}{\lambda^2} \text{ при } |F(\xi, \eta)| = \text{const}(\xi, \eta) \quad (4.6)$$

Если же АР имеет некоторую зависимость от координат вдоль антенны, то эта величина становится только меньше, но насколько именно меньше – следует из расчета по формуле (4.4), где влияние АР на КНД проявляется через влияние АР на саму ДН. Так вот, эффективный размер антенны, а в данном случае плоской антенны — эффективная площадь Σ_{eff} , определяется тогда следующим образом:

$$\Sigma_{\text{eff}} = \frac{G_0(F(\xi, \eta))}{(G_0)_{\text{max}}} \Sigma = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_0(F(\xi, \eta)) \quad (4.7)$$

В силу отмеченного свойства (4.6), эффективный размер антенны всегда меньше ее фактического размера, и эта величина показывает размер той антенны с равномерным АР, которая имеет ровно ту же величину КНД, что и заданная антенна с неравномерным АР. Другими словами, эффективный размер антенны количественно характеризует эффективность использования апертуры с точки зрения достижения максимальных значений КНД.

Предельный случай наиболее сильной неравномерности АР очевиден – это антенна, у которой отличное от нуля АР присутствует только в одной точке апертуры, а во всех других точках апертуры оно равно нулю. Следовательно, максимальный КНД такой «антенны» падает до единичного значения (поскольку нет никакого ее отличия от точечного излучателя), а эффективная площадь, согласно (4.7) – до величины $\lambda^2/4\pi$. Очевидно, что в этом случае антенна, имеющая площадь Σ , практически перестает быть антенной и теряет весь свой потенциал направленного действия, связанный с большим своим размером $\Sigma \gg \lambda^2$.

Лекция 5. Влияние амплитудно-фазового распределения антенны на диаграмму направленности. Примеры расчетов

Подводя итог предыдущим трем лекциям, мы можем считать себя готовыми к тому, чтобы рассмотреть простые и, вместе с тем, наиболее часто используемые на практике примеры решения прямой задачи ТАС. Конкретно, мы рассмотрим несколько примеров расчета ДН антенны по заданному АФР, и если еще более конкретно, – по заданным функциям *фазового* (ФР) и *амплитудного* (АР) распределений по отдельности. Такие примеры дадут нам основания к тому, чтобы ответить на вопрос о влиянии вида АФР на ДН и, тем самым, – на практически важный вопрос о том, каким образом нужно управлять АФР с тем, чтобы добиться от антенны тех или иных характеристик направленности. Среди таких характеристик наибольший интерес для разработчиков представляют те, которые были определены на прошлой лекции – направление главного максимума, угловая ширина главного лепестка (ШГЛ), уровень боковых лепестков (УБЛ), коэффициент направленного действия (КНД).

В основном, мы ограничимся далее наиболее простым вариантом для самой антенны, а именно, вариантом антенны в виде линейного отрезка, расположенного вдоль одной из осей плоскости (x, y) , например, вдоль оси x . Такой выбор является предельным

случаем плоской антенны, когда ее волновой размер по одной из осей становится предельно малым (стремится к нулю). Но сначала, сохраняя последовательность в изложении материала, рассмотрим простейший вариант прямой задачи для плоской антенны: зададим «плоское» АФР в виде комбинации равномерного (постоянного по апертуре) АР и ФР, а саму антенну — в виде прямоугольника с размерами $a \times b$, который показан на рис. 5.1.

Отметим, что антенны с равномерным ФР стандартно называются *синфазными* антеннами (т.е. антеннами с равными фазами всех составляющих их элементов – источников или приемников).

Исходя из общепринятого условия нормировки АФР, чтобы максимум ДН (4.1) был равен единице, и полагая постоянное значение ФР равным нулю (ненулевое значение ФР будет играть тривиальную роль некоторого добавка к фазе ДН и не окажет влияния на модуль амплитудной ДН и ДН по мощности), имеем условия для постановки прямой задачи:

$$\Sigma = a \times b, F(\xi, \eta) = \frac{1}{ab} e^{i\varphi_0}, \varphi_0 = 0 \quad (5.1)$$

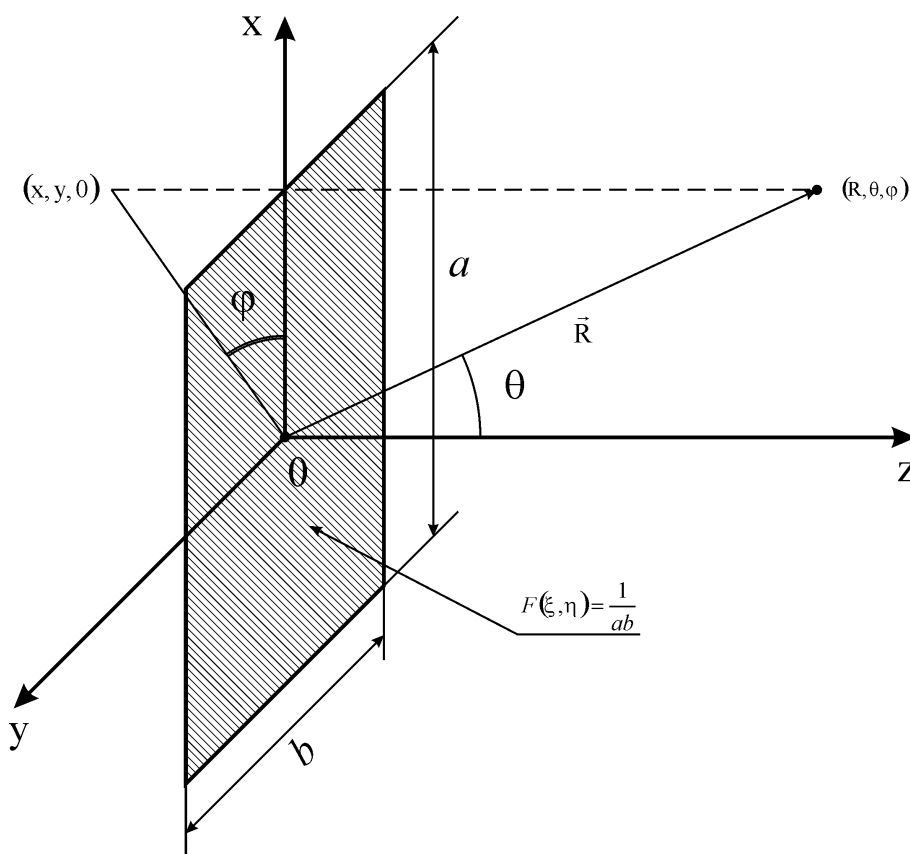


Рисунок 5.1. Пример плоской антенны (см. рис. 2.1) в виде прямоугольной площадки

Непосредственная постановка АФР (5.1) в выражение для ДН (4.1) легко приводит к следующему результату:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik\xi \sin \theta \cos \varphi} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik\eta \sin \theta \sin \varphi} d\eta = \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi\right)}{\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi\right)} \times \frac{\sin\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi\right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi\right)} \quad (5.2)$$

Как следует из выражения (5.2), ДН представляет собой произведение двух сомножителей, имеющих одинаковый вид функции $\text{sinc}(t) = \sin t/t$, но с разными аргументами, различие которых заключается в различии волновых размеров антенны по двум базовым осям и в разном проецировании координат точки наблюдения на эти оси через азимутальный угол φ . Направление главного максимума, очевидно, здесь $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, т.е. главный лепесток антенны формируется точно в поперечном к плоскости антенны направлении. Последнее тоже понятно: поскольку все элементарные источники имеют равные фазы (являются синфазными), то нет никаких причин для смещения максимума интерференционной картины суммарного поля относительно этого угла.

Плоскости (x, z) и (y, z) называются, с точки зрения анализа ДН, главными плоскостями окружающего антенну пространства, и для проекции объемной ДН на эти плоскости (для ДН в главных плоскостях) имеем выражения:

$$D_{xz}(\theta)|_{\varphi=0} = \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta\right)}, \quad D_{yz}(\theta)|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\left(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta\right)} \quad (5.3)$$

ШГЛ $(\Delta\theta)_{0.7}$ в каждой из этих плоскостей находится из решения соответствующего (для данной плоскости) тригонометрического уравнения. Например, для первой из них имеем:

$$\sin\left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\Delta\theta)_{0.7}\right) = 0.7 \left(\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\Delta\theta)_{0.7}\right). \quad (5.4a)$$

При больших волновых размерах антенны по обеим осям имеем приближенные равенства:

$$(\Delta\theta)_{0.7}|_{\varphi=0} \approx \frac{\lambda}{a}, \quad (\Delta\theta)_{0.7}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \approx \frac{\lambda}{b}. \quad (5.4b)$$

Хорошо видно отсюда (интуитивно это представляется очевидным), что если антенна имеет существенно разные размеры по своим осям, то ДН оказывается сильно несимметричной в смысле зависимости от угла θ : более «острой» в одной главной плоскости и относительно «расплывчатой» – в другой, в результате чего сечение главного лепестка будет иметь вид сплюснутого эллипса.

В свою очередь, для расчета КНД в направлении главного максимума имеем выражение (см. (4.6)), согласно которому величина КНД определяется произведением двух волновых размеров антенны, умноженному на величину полного телесного угла:

$$G_0 \approx 4\pi \frac{ab}{\lambda^2} = 4\pi \left(\frac{a}{\lambda}\right) \left(\frac{b}{\lambda}\right). \quad (5.5)$$

Очевидно, в случае квадратной апертуры (при $a = b = L$) ДН становится одинаковой в главных плоскостях, а множители в (5.2) отличаются друг от друга только зависимостью от угла φ .

Несколько более сложный пример расчета ДН относится к случаю круглой антенны, диаметр которой D определим условием $D = L$ для сопоставления с рассмотренным выше «квадратным» примером. Поскольку круг при этом условии полностью вписывается в квадрат, а его площадь составляет только часть от площади квадрата (равную $\pi/4 \approx 0,8$), то интуитивно ясно, что ШГЛ круглой антенны должна быть несколько больше, чем для эквивалентной (в указанном смысле) квадратной антенны, и что это расширение главного лепестка «обеспечивается» отсутствием тех источников, которые расположены в угловых секторах квадрата за пределами вписанного круга.

Ожидаемое отличие ДН квадратной и круглой антенн наглядно иллюстрируется на рис. 5.2, заимствованный из справочника [6]. Видно, что показанная сплошной линией ДН круглой антенны имеет несколько (хотя и не сильно) более широкий главный максимум, чем пунктирная ДН для квадратной антенны. Видно также, что с УБЛ ситуация обратная – у круглой антенны он ниже, что тоже представляется вполне очевидным: увеличение ШГЛ и, соответственно, увеличение излучаемой мощности по главному лепестку должно быть «скомпенсировано» уменьшением излучения в области боковых лепестков, иначе не будет выполнено условие равенства полной излучаемой мощности в обоих случаях. Подчеркнем, возвращаясь к определению и смыслу ДН (4.1) как основной характеристики антенны: для этого и нормируют одинаковым образом все ДН, чтобы она была именно той характеристикой антенны, которая показывает угловое распределение излучаемой мощности, но при этом не зависит от полной мощности, подводимой к антенне. В противном случае более «мощная» ДН (для более мощной антенны) неизбежно будет иметь более широкий главный лепесток при одном и том же виде АФР.

Что же касается расчетных выражений, послуживших основой для построения рис. 5.2, то они имеют следующий вид (нижние индексы ДН относятся к круглой и квадратной антеннам, соответственно):

$$|D_0(\theta)|^2 = \left(\frac{J_1(t)}{t} \right)^2, \quad |D_{\text{КВ}}(\theta)|^2 = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2, \quad t = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta = \pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta, \quad (5.6)$$

где $J_1(t)$ – функция Бесселя первого порядка. Качественно, эта функция похожа на функцию $\sin(t)$ тем, что начинает расти также с нулевого значения и затем осциллирует вокруг нулевого значения, но есть в ней и серьезные отличия – нули этой функции не являются эквидистантными и постепенно «сгущаются» с ростом аргумента, при этом ее максимальные значения монотонно уменьшаются, в результате чего боковые лепестки ДН круглой антенны заметно быстрее уменьшаются с ростом своего номера, чем у квадратной антенны (что хорошо видно из рис. 5.2).

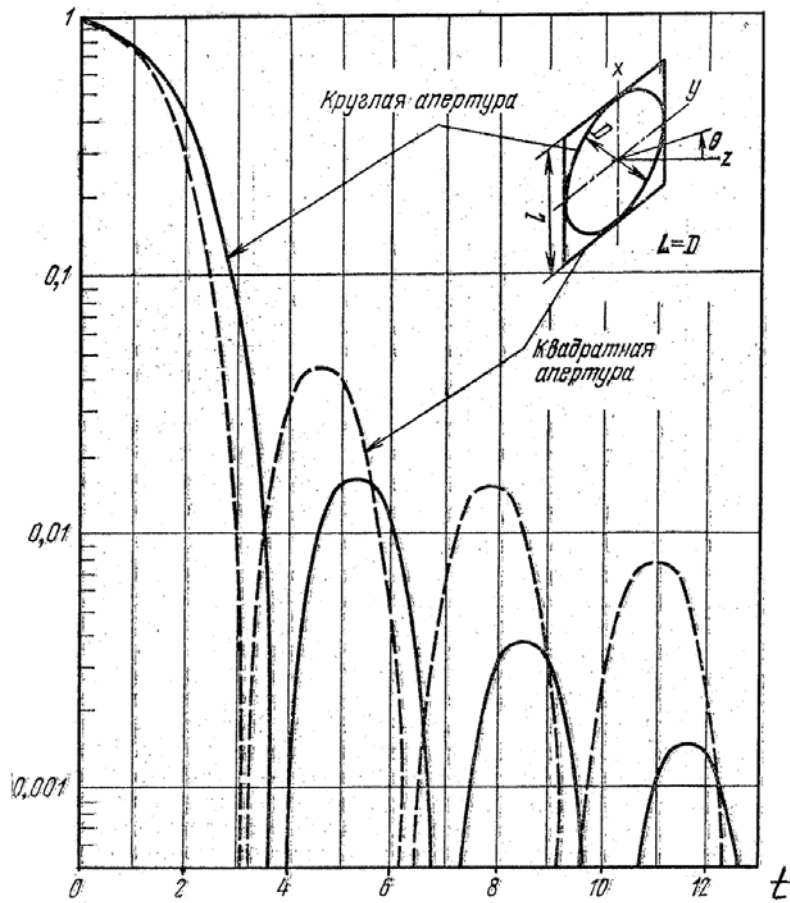


Рисунок 5.2. ДН по мощности круглой антенны (сплошная линия) и квадратной антенны (пунктир) равного размера [6]

На этом мы закончим анализ прямой задачи для плоских антенн и обратимся к более простому случаю (и даже самому простому с точки зрения геометрии антенны) – к *линейной антенне*.

Для определенности, будем считать, что линейная антенна расположена вдоль оси x и имеет длину $L_x = L$. Линейность антенны математически означает ее точечный (нулевой) размер по оси y , но физически – более мягкое условие малого волнового размера по этой оси (условие $L_y \ll \lambda$). Например, если речь идет об антенне СВЧ диапазона электромагнитных волн, для которого ранее были получены оценки границ волновой и дальней зон (см. лекцию 3), то провод с диаметром сечения в несколько миллиметров совершенно оправдывает термин «линейная антенна». Фактически, более практичным критерием линейности антенны является азимутальная симметрия ее ДН: пренебрежимо слабая зависимость ДН от угла φ . Другими словами, объемная ДН линейной антенны в пространстве представляет собой фигуру вращения плоской ДН $D(\theta)$ в главной плоскости (x, z) вокруг антенной оси x . Именно эти диаграммы $D(\theta)$ мы и рассмотрим, задавая АФР $F(x)$ как функцию только одной переменной x (поскольку декартовы координаты точки наблюдения нами уже не используются, мы можем «вернуть» обозначение для координаты точки вдоль самой антенны: $\xi = x$).

Общее уравнение, связывающее ДН и АФР антенны, теперь становится однократным интегралом в конечных пределах линейного отрезка и принимает вид:

$$D(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} F(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \quad (5.7)$$

где АФР по-прежнему нормировано так, чтобы модуль главного максимума ДН имел значение $|D(\theta)|_{\max} = 1$. Выделяя в явном виде АР (модуль АФР) и ФР (аргумент АФР), имеем следующее стандартное представление для АФР:

$$F(x) = |F(x)| e^{i\varphi(x)}, \quad |F(x)| = f(x), \quad (5.8)$$

согласно которому расчет ДН по известной функции АФР сводится к расчету интеграла:

$$D(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{i\varphi(x) - ikx \sin \theta} dx. \quad (5.9)$$

Остановимся теперь на анализе выражения (5.9) для ряда важных частных случаев.

1) Антенна с равномерным АР и линейным ФР:

$$f(x) = \frac{1}{L}, \quad \varphi(x) = \alpha x, \quad \alpha = k \sin \theta_0. \quad (5.10)$$

Согласно (5.10), линейная функция ФР имеет, без нарушения общности, такое представление, в котором появился угол θ_0 как тот параметр антенны, который определяет угол наклона линии ФР к оси антенны. По существу, этот угол указывает угол наклона линии равной фазы элементов антенны (волнового фронта антенны) к ее оси, и для него есть общепринятые термины: *угол фазировки* или *угол компенсации* антенны. Сама же антенна с АФР вида (5.10) называется *фазированной антенной*.

Подставляя АФР (5.10) в выражение (5.9), получаем для ДН:

$$D(\theta) = \frac{\sin t}{t}, \quad t = \pi \frac{L}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0). \quad (5.11)$$

Не удивительно, что мы получили ДН того же вида, что и для плоской антенны в главной плоскости (x, z) , но теперь в ДН «участвует» угол фазировки, влияние которого очевидно: направление главного максимума ДН смещается от нормали к антенне на величину этого угла. Следовательно, возникает возможность «качания» по углу ДН как целого, прежде всего, главного лепестка путем изменения угла фазировки, но без поворота самой антенны. Эта широко используемая в технике антенн операция называется *сканированием* ДН (от англ. *to scan* — качать), а сами антенны — сканирующими.

Функция $\text{sinc}(t)$, описывающая ДН фазированной антенны, хорошо знакома студентам из разных курсов, поскольку она часто встречается во многих задачах радиофизики и смежных дисциплин. Одни из таких знакомых примеров — Фурье-спектр одиночного видеопульса (без высокочастотного заполнения) прямоугольной формы и пространственное распределение поля дифракции плоской волны на бесконечно узкой щели в дальней зоне. Вид этой функции показан на рис. 5.3 (квадрат ее модуля показан

пунктиром на рис. 5.2). Основные отличительные особенности этой примечательной функции состоят в том, что в ней присутствует выраженный главный максимум, который окружен набором монотонно спадающих по величине боковых максимумов, ширины которых строго одинаковы в силу эквидистантности нулей — они следуют друг за другом через значение аргумента, точно равное π . Подчеркнем, что показанный здесь график относится не к угловой ДН $D(\theta)$, а к функции $D(\sin \theta)$, и в силу нелинейного характера функции $\sin \theta$ нули ДН $D(\theta)$ уже не являются эквидистантными: с ростом угла растет угловое расстояние между соседними нулями, т.е. ширины боковых лепестков монотонно растут с их удалением от главного лепестка и более заметно в области больших углов. Отметим, однако, с учетом уменьшения уровня боковых лепестков по мере их удаления от главного лепестка этот эффект не столь важен с практической точки зрения.

Для антенн большого волнового размера (при $L \gg \lambda$) из выражения (5.11) получаются следующие приближенные выражения для ШГЛ:

$$\begin{aligned} (\Delta\theta)_{0.7} &\approx \frac{\lambda}{L \cos \theta_0} \text{ при } |\theta_0| \leq \frac{\pi}{3}, \\ (\Delta\theta)_{0.7} &\approx 2 \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{1/2} \text{ при } |\theta_0| \approx \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Расчетные формулы (5.12) работают тем лучше, чем больше величина L/λ , но ими можно пользоваться как практически точными уже при $L/\lambda \sim 10$. Подчеркнем, что ШГЛ зависит не только от волнового размера антенны, но весьма чувствительна к углу фазировки при больших его значениях, в то время как при малых углах, когда $\cos \theta_0 \approx 1$, зависимости от него практически нет, и ШГЛ определяется только обратной величиной волнового размера.

Аналогично, для КНД в области не слишком больших углов фазировки (при условии $\theta_0 \leq \pi/3$) имеем расчетное выражение:

$$G_0 \approx 2 \left(\frac{L}{\lambda} \right) \cos \theta_0 \leq \frac{2L}{\lambda}, \quad (5.13)$$

которое показывает монотонное уменьшение КНД с ростом угла фазировки, отвечающее росту ШГЛ согласно первому из выражений (5.12).

Что же касается УБЛ, то его величина определяется уровнем первых (ближайших к главному с обеих сторон) боковых максимумов и равна $2/3\pi \approx 0.2$ (или -13 дБ в логарифмическом масштабе) вне зависимости от угла фазировки.

Сделаем простые оценки для полученных величин. Например, зададим волновой размер антенны $L/\lambda = 100$, что является вполне типичным (и далеко не рекордным) значением для антенн РЛС в СВЧ диапазоне. Тогда для ШГЛ в области малых углов фазировки имеем оценку $(\Delta\theta)_{0.7} \approx 10^{-2} \approx 0.5^\circ$, а для больших углов, когда главный лепесток формируется в направлении, близком к оси антенны, имеем $(\Delta\theta)_{0.7} \approx 0.2 \approx 10^\circ$. Как видно, сканирование ДН на такие крутые углы приводит к радикальной (в ~ 20 раз)

потере разрешающей способности антенны. Величина КНД падает при этом столь же резко: $G_0 \approx 200$ и $G_0 \approx 10$, соответственно. По этой причине сканирование на такие углы, как правило, не используется — сектор углов «качания» ДН выбирается ограниченным.

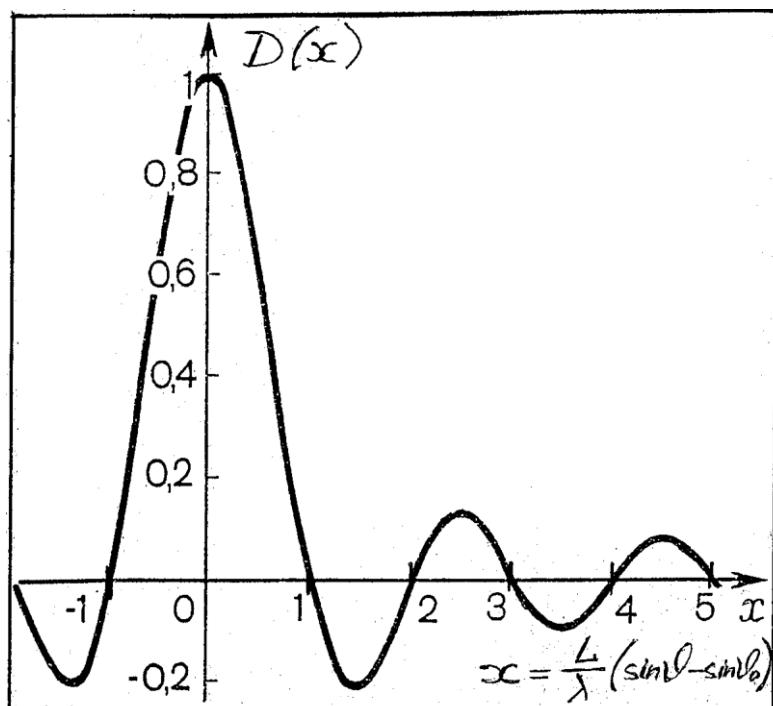


Рисунок 5.3. ДН (5.11) линейной фазированной антенны с равномерным АР

Иллюстрацией отмеченных особенностей формирования ДН фазированной линейной антенны может служить рис. 5.4. На нем показано изменение ДН в зависимости от угла фазировки в максимально широком диапазоне его изменения (от 0° до 90°) при некотором фиксированном значении волнового размера антенны (здесь он не столь велик, как легко можно оценить по величине ШГЛ). Видно, что с ростом угла происходит очень заметное (в разы) ухудшение направленности антенны.

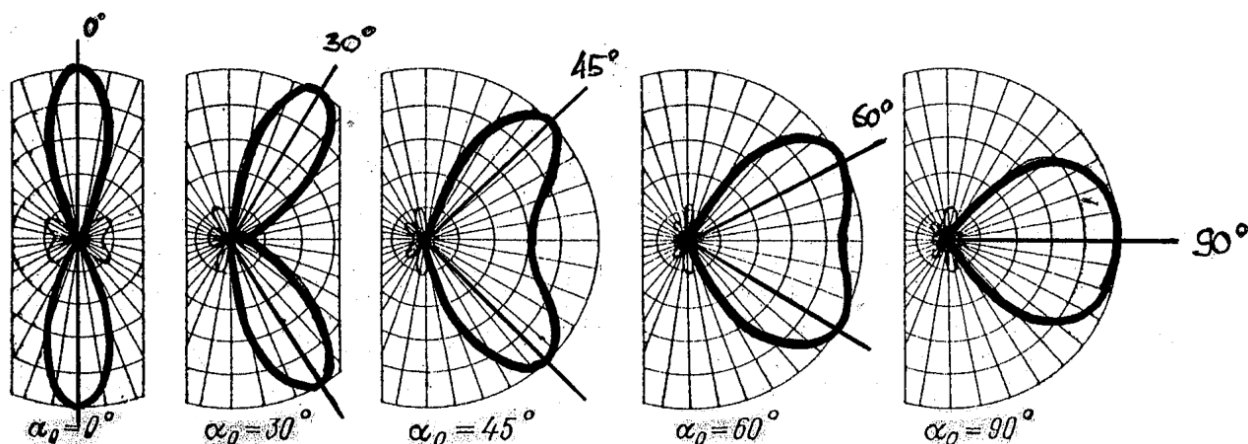


Рисунок 5.4. Зависимость ДН линейной фазированной антенны от угла фазировки [6]

Таким образом, подведем итог рассмотрению ДН фазированной линейной антенны. Мы выяснили, что оба параметра антенны – ее волновой размер и угол фазировки (компенсации) – существенно влияют на направленные свойства (заметим, что других параметров у такой антенны и нет, согласно (5.10)). Определяющей величиной с точки зрения направления главного максимума ДН является угол фазировки, а величины ШГЛ и КНД определяются, в первую очередь, волновым размером антенны. Увеличению угла фазировки отвечают три характерных и взаимосвязанных эффекта:

- 1) смещение главного максимума ДН на угол, равный углу фазировки;
- 2) рост ШГЛ;
- 3) уменьшение КНД.

Последние два эффекта означают частичную потерю (ослабление) направленности, которое сопровождается, таким образом, сканирование ДН в области крутых углов в качестве негативных его следствий. Однако, при малых углах фазировки эти эффекты практически не проявляются. По этой причине сектор углов сканирования ограничивают, как правило, диапазоном углов, для которых величина $\cos\theta_0$ еще не слишком мала (например, углами до $\sim 30^\circ$ – 60°).

Задание студентам:

- 1) *дать физическую интерпретацию зависимости ШГЛ от угла фазировки антенны и понять, почему эта зависимость при «умеренных» углах имеет именно тот вид, который указан в первом из выражений (5.12).*
- 2) *оценить волновой размер антенн, ДН которых показаны на рис. 4.3, 5.4.*
- 3) *на основе выражения (5.11) построить ДН $D(\theta)$ во всем интервале углов (от -90° до 90°) для некоторого фиксированного волнового размера антенны (например, при $L/\lambda = 100$) и при нескольких (заметно различных) углах фазировки, аналогично рис. 5.4.*

Лекция 6. Влияние амплитудно-фазового распределения антенны на диаграмму направленности. Примеры расчетов (продолжение)

На прошлой лекции мы начали анализ серии простых и, вместе с тем, практически важных примеров решения прямой задачи теории антенн. Вспомним, что *прямая задача есть задача расчета ДН антенны известной геометрии по заданной на апертуре функции АФР*. Наш анализ ограничивается теперь выбором простейшей геометрии антенны в виде линейного отрезка некоторой произвольной, но конечной длины L . Другой пространственный параметр задачи – длина волны λ скалярного поля излучения (электромагнитного для определенной его поляризации или акустического), отвечающая некоторой произвольной (в зависимости от конкретной антенны и ее назначения) рабочей частоте антенны и, соответственно, волновому числу. Следовательно, основной безразмерный параметр нашей задачи – волновой размер антенны L/λ .

Итак, мы уже рассмотрели случай фазированной антенны (5.10), когда ФР выбирается в виде линейной функции, имеющей единственный параметр – угол фазировки (компенсации) ϑ_0 , в то время как АР имеет постоянное по апертуре значение и

именно такое, чтобы выполнялось условие нормировки ДН (4.1). Было получено выражение (5.11) для ДН как функции угловой координаты точки наблюдения, параметрами которой ожидаемо являются волновой размер антенны и угол фазировки.

Сейчас мы остановимся на несколько более сложном варианте выбора ФР в виде квадратичной функции переменной x при том же выборе АР в виде постоянной величины. Выражение для квадратичного ФР может быть представлено в двух эквивалентных вариантах:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \left(\frac{2x}{L} \right)^2 = \frac{kx^2}{2R_0} \quad (6.1)$$

Соответственно, параметрами квадратичного ФР могут быть его амплитуда φ_0 или эквивалентное ей расстояние фокусировки R_0 . Связь между ними может быть легко получена из выражения (6.1), она имеет вид:

$$R_0 = \frac{\pi}{4\varphi_0} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 L, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \frac{L^2}{\lambda R_0}$$

Результаты расчета ДН линейной антенны в случае квадратичного ФР приведены ниже на рис. 6.1 [6]. Очевидно, что поскольку функция ФР симметрична относительно центра антенны, то ДН также симметрична относительно нулевого значения угла и поэтому приведена здесь только для положительных значений аргумента $t = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta$.

Интуитивно ясно и хорошо видно из рисунка, что с ростом величины φ_0 ДН антенны все сильнее отличается от ДН фазированной антенны (в данном случае имеющей нулевой угол фазировки $\vartheta_0 = 0$, т.е. антенна сравнения является синфазной). Фломастером дополнительно выделены качественно различные ситуации: $\varphi_0 = \pi/8 \ll 1$ (слабое отличие от антенны сравнения), $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = \pi$ (умеренная квадратичность ФР, отличия уже весьма заметны, хотя главный и боковые лепестки ДН еще сохраняются), наконец, $\varphi_0 = 2\pi \gg 1$ (сильная квадратичность ФР, радикальное отличие от антенны сравнения).

Обратим также внимание на то, что расчет ДН антенны с квадратичным ФР в дальней зоне эквивалентен расчету ДН антенны с линейным ФР, но в более близкой волновой зоне на расстоянии R_0 , где, как было показано ранее, необходимо учитывать квадратичные поправки в фазе подынтегральной экспоненты (см. лекцию 2). Следовательно, приведенные на данном рисунке диаграммы, если анализировать их сверху вниз (от больших значений расстояния R_0 к меньшим) будут точно такими же для синфазной антенны, но при условии, что точка наблюдения «перешла» из дальней зоны в волновую и далее постепенно приближается к антенне, оставаясь в этой же зоне (не переходя в ближнюю). Различия показанных на рисунке ДН как раз и демонстрируют тот важный факт, который мы отмечали ранее – в волновой зоне ДН имеет зависимость от расстояния, т.е. она не является функцией только угловой переменной. Обратное движение по этим рисункам (снизу вверх) эквивалентно удалению от антенны (росту R_0) и тем самым показывает, как постепенно формируется та ДН, которая была получена на прошлой лекции для синфазной антенны (здесь она приведена на верхнем левом рисунке для $\varphi_0 = 0$).

В случае, если квадратичное ФР имеет более общий вид, т.е. содержит, наравне с квадратичным, линейное слагаемое (отвечающее фазировке антенны в заданный угол θ_0), то ДН будет иметь вид, аналогичный приведенному на рис. 6.1, но нулевое значение аргумента t будет при этом отвечать условию $\theta = \theta_0$. Изменение угла θ_0 приводит к тому же эффекту сканирования ДН, который мы отмечали на прошлой лекции, но сама «качающаяся» диаграмма в этом случае имеет вид, отличный от полученной ранее диаграммы вида (5.11).

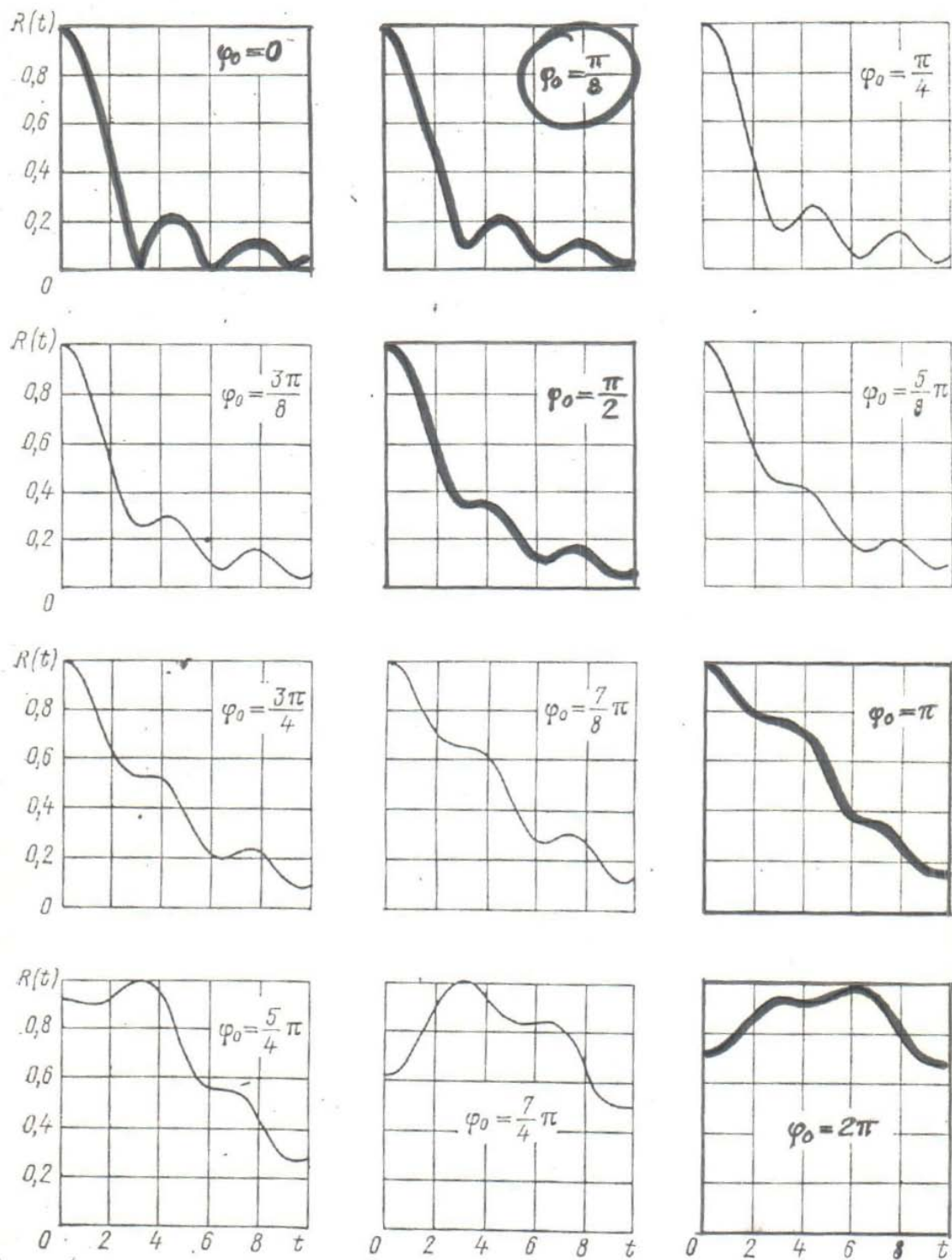
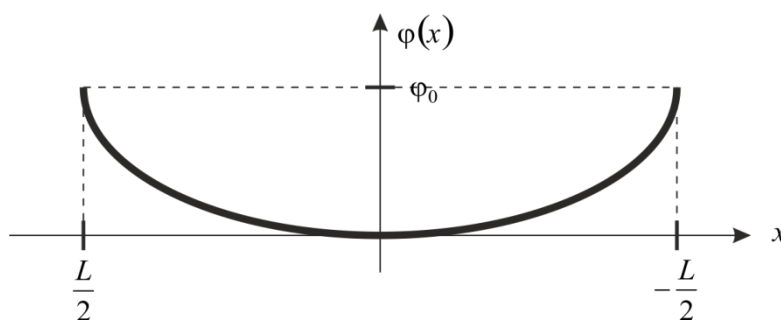


Рисунок 6.1. ДН линейной антенны при квадратичном фазовом распределении [6]

$$\varphi(x) = 4\varphi_0 \frac{x^2}{L^2}$$



Задание студентам:

Дать физическую интерпретацию показанных на рис. 6.1 диаграмм и ответить на качественные вопросы:

- 1) почему даже при малых значениях φ_0 исчезают нули ДН? (для этого надо понять причину появления нулей в ДН синфазной антенны или, в более общем случае, фазированной антенны);
- 2) почему для больших значений φ_0 (нижний ряд рисунков) ДН «разрушается» настолько, что главный лепесток становится слабо выраженным, т.е. антенна практически теряет свою направленность, несмотря на неизменный волновой размер?
- 3) чему равен (по порядку величины) волновой размер антенны, для которой построен рис. 6.1?

На этом мы завершим рассмотрение возможностей управления ДН путем управления ФР и обратимся к вопросу о том, каким образом на ДН влияет выбор АР. Очевидно, такое влияние должно быть, и даже весьма существенным, поскольку в общем случае комплексное АФР зависит от координаты вдоль антенны не только через свой аргумент (фазу), но и через модуль величины.

Практической целью, которая, как правило, преследуется при выборе АР, является перераспределение полной излучаемой мощности антенны в дальней зоне между главным и боковыми лепестками. Другими словами, речь идет о влиянии АР на те два параметра ДН, на которых мы уже останавливались – на ШГЛ и УБЛ. Физически очевидно, что если мы зафиксируем полную подводимую к антенне мощность и начнем варьировать АР, то можем добиться двух противоположных эффектов: либо роста ШГЛ, который будет сопряжен с уменьшением УБЛ (при этом мы «закачиваем» более высокую мощность в главный лепесток за счет его уширения, пропорционально уменьшая мощность в области боковых лепестков), либо наоборот – уменьшения ШГЛ и роста УБЛ.

Не погружаясь в анализ большого разнообразия конкретных вариантов АР (см., например, таблицу 5.1 в справочнике [6]), остановимся на одном только примере, который позволит проиллюстрировать отмеченные эффекты. Для этого рассмотрим АФР в виде следующей функции своего аргумента:

$$F(x) = \left[1 - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right]^m, \text{ где } m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots \quad (6.2)$$

Здесь параметр m может принимать как положительные значения (в этом случае АР имеет вид «выпуклой» функции, имеющей максимум в центре и симметрично спадающей к

краям антенны до нуля), так и отрицательные (в этом случае, напротив, «вогнутое» АР имеет минимальное значение в центре и симметрично растет к краям антенны). Очевидно, речь в данном примере идет только о влиянии АР, поскольку функция АФР является действительной (антенна является синфазной). Случай $m = 0$ отвечает рассмотренному нами случаю синфазной антенны с равномерным АР, ДН для которого мы уже хорошо знаем. Результат расчета ДН для произвольных ненулевых значений параметра m выражается через специальные лямбда-функции, но для «простых» значений этого параметра $m = -0,5$ и $m = 0,5$ ДН имеет несложный вид и выражается через хорошо известные функции Бесселя нулевого и первого рода, соответственно [6]:

$$D_{m=-1/2}(t) = J_0(t), \quad D_{m=1/2}(t) = \frac{2J_1(t)}{t}, \quad D_{m=0}(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad \text{где } t = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta$$

Количественное сравнение этих трех ДН суммируется таблицей, иллюстрирующей отмеченный эффект перераспределения излучаемой мощности между главным и боковыми лепестками в зависимости от вида АР. Для каждой из ДН приведены значения ШГЛ ($\Delta\theta_{0,7}$) и УБЛ (σ), и здесь же приведены значения для «треугольного» АР, показанного пунктиром.

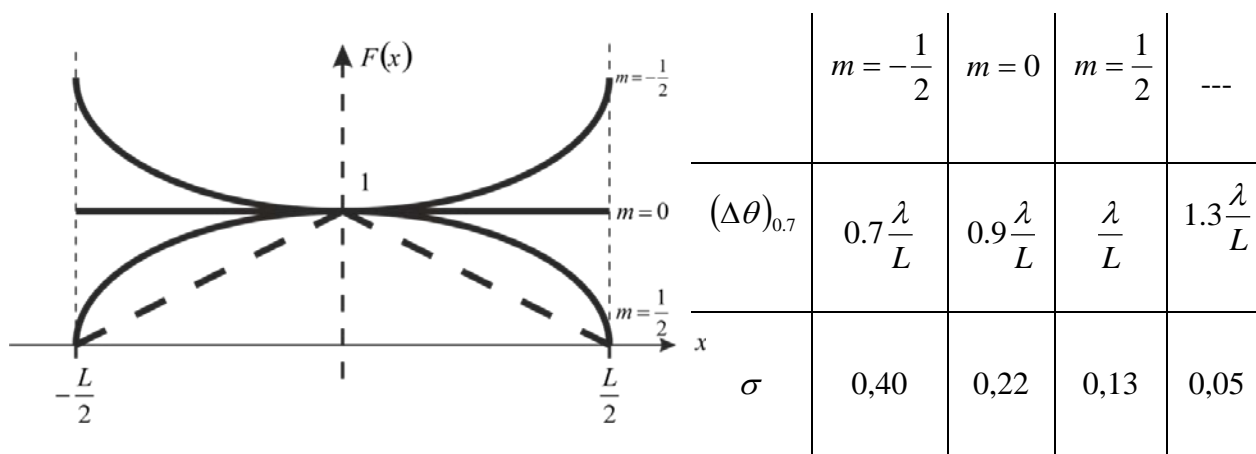


Таблица 6.1. Параметры антенны (ШГЛ и УБЛ) антенны с амплитудным распределением параметрического вида (6.2) и линейным спадом к краям антенны (пунктир) [6]

Анализируя приведенные здесь значения параметров ДН, мы можем сделать важный вывод: выбор АР в виде спадающей к краям антенны функции приводит только к росту ШГЛ и, соответственно, к уменьшению УБЛ. Напротив, рост АР к краям антенны приводит к обратному эффекту – уменьшению ШГЛ и росту УБЛ. Видно также, что вариации УБЛ оказываются весьма существенными (эта величина меняется в несколько раз), в то время как ШГЛ меняется не столь заметно, если сравнивать с опорным случаем равномерного АР.

В силу такой, весьма сильной, чувствительности УБЛ к выбору АР, показанный здесь эффект имеет практическую значимость: АР в виде спадающей к краям антенны функции используются именно для того, чтобы заметно уменьшить УБЛ и, соответственно, заметно понизить мощность излучения в области боковых лепестков ДН.

Аналогичный эффект для приемных антенн означает, что антенна с таким АР будет иметь повышенную помехозащищенность по боковым лепесткам. Обратной стороной такого положительного эффекта является, очевидно, частичное ослабление разрешающей способности по главному лепестку.

Вследствие своей практической важности антенны со спадающими к краям распределениями (не обязательно до нуля, конечно) получили специальное название – *аподизированные* антенны. Сам термин «аподизация» имеет оптическое происхождение и широко используется в радиофизике, оптике, акустике и смежных дисциплинах. Например, в спектральном анализе и обработке сигналов часто используются т.н. «оконные функции» или «функции пропускания» аналогичного вида с уменьшением величины к краям пространственного, временного или частотного интервалов (в зависимости от конкретной задачи) и с той же, по сути, целью – уменьшить уровень боковых лепестков (частотной характеристики фильтра, автокорреляционной функции сигнала, бокового излучения диафрагмированного пучка и т.п.).

Этими несложными, но наглядными примерами мы завершаем рассмотрение прямой задачи теории антенных систем и продолжаем дальнейшее знакомство с этой теорией – переходим к обратной задаче.

Задание студентам:

сопоставить эффект влияния аподизации антенны на ДН с тем определением эффективного размера антенны (в данной случае – эффективной длины), которое было дано в лекции 4, и показать, что аподизация антенны физически эквивалентна уменьшению ее длины при равномерном АР, и чем сильнее аподизация, тем меньше становится эффективная длина антенны (поэтому сильная аподизация не используется на практике).

2. СИНТЕЗ АНТЕНН КАК ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ АНТЕНН

Лекция 7. Постановка обратной задачи. Необходимое условие существования точного решения

Итак, мы переходим к анализу *обратной задачи* теории антенн, или, другими словами, задачи *синтеза антенн*. Речь пойдет о решении этой задачи именно в однородной среде, для которой ранее было получено основное для нас уравнение связи АФР и ДН антенны (той среде, в которой волновые поля отдельных элементарных источников представляют собой сферические волны, а в дальней зоне они приближенно полагаются плоскими волнами).

В соответствии с тем общим планом, который был представлен на первой лекции, наш анализ будет включать рассмотрение следующих принципиальных вопросов:

- 1) *необходимое условие существования точного решения* – определение тех ограничений на задаваемую ДН, которые необходимы для того, чтобы найденная функция АФР обеспечивала *точную* реализацию заданной ДН;
- 2) *методы точного решения* (точного синтеза), которые позволяют найти искомое АФР в том случае, если заданная ДН удовлетворяет необходимому условию существования точного решения;
- 3) *методы приближенного решения* (приближенного синтеза), которые «работают» в тех ситуациях, когда заданная ДН не удовлетворяет этому условию, или удовлетворяет, но полученное АФР оказывается слишком сложным для реализации (по техническим или каким-то другим причинам), поэтому становится целесообразным использовать более простое АФР.

Прежде всего, уточним постановку обратной задачи. В общем виде, она формулируется следующим образом.

Заданы: ДН антенны и (или) требования к ряду ее характеристик – к величине КНД, УБЛ, форме главного лепестка, а также требования к апертуре антенны (как правило, они определяются с учетом тех или иных конструктивных ограничений при ее разработке).

Требуется: определить апертуру антенны (форму и размеры) и функцию АФР на апертуре, которая обеспечит – точно или с некоторой, наперед заданной точностью – реализацию заданной ДН и(или) заданных ее характеристик.

Мы не будем, однако, останавливаться на решениях задачи в такой общей постановке и ограничимся рассмотрением более простой, но для большинства прикладных задач наиболее важной постановки, а именно, когда требуется *по заданной ДН найти АФР на заданной апертуре*. Другими словами, геометрия антенны задается наравне с ДН и не является искомой, и тогда задача сводится к нахождению только АФР. Более того, мы по-прежнему ограничимся случаем простейшей антенны в виде отрезка конечной длины, который уже использовали при анализе прямой задачи.

Вопрос о необходимом условии существования точного решения, с математической точки зрения, сводится к определению того класса функций, к которому должна принадлежать заданная ДН. На этот счет в теории антенн хорошо известна теорема Винера–Пэли, которая определяет необходимые и достаточные условия существования точного решения задачи синтеза антенны заданного волнового размера именно как условия принадлежности заданной ДН к определенному классу функций. Познакомиться с этой теоремой и ее обсуждением можно, к примеру, в монографиях [2,3]. Мы этого делать не станем – «срежем угол» функционального анализа и сразу обратимся к более важному для нас (и более наглядному для понимания на качественном уровне) вопросу физической формулировки необходимого условия. Непосредственно из нее мы получим затем один из двух интересующих нас методов точного решения задачи синтеза.

Прежде всего, сделаем замену переменных в уже известном нам интегральном уравнении, которое связывает АФР и ДН линейной антенны:

$$D(\theta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \quad (7.1)$$

Вместо угловой переменной θ введем т.н. *обобщенную* угловую переменную z , а вместо размерной переменной x вдоль антенны – безразмерную переменную y , согласно следующим выражениям:

$$z = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta, \quad y = \frac{2x}{L} \quad (7.2)$$

Далее, расширим формально пределы интегрирования до бесконечных в обе стороны, полагая при этом, что функция АФР строго равна нулю для всех значений $|y| > 1$ (вспомним, что подобную математическую операцию мы уже делали ранее для плоской антенны, см. (4.2), (4.3)). Тогда «расширенное» уравнение (7.1) в новых переменных примет вид:

$$D(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-izy} dy \quad (7.3)$$

Видим, что уравнение (7.3) в точности совпадает с уравнением для расчета Фурье-спектра функции $F(y)$, что и указывает на то, что ДН $D(z)$ по своему физическому смыслу есть спектр АФР по обобщенной угловой переменной. Но тогда справедливо и обратное: АФР есть Фурье-спектр ДН, поскольку интеграл Фурье (7.3) имеет обратное преобразование:

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) e^{iyz} dz \quad (7.4)$$

Отсюда следует очень важный вывод: если АФР – не что иное, как спектр ДН, и при этом область ненулевых значений АФР $F(y)$ заведомо ограничена конечным отрезком переменной $|y| \leq 1$, то ДН является функцией *финитного* спектра. Финитного –

значит, ограниченного (в буквальном переводе), но ограниченного не по своей величине, что важно, но по тому отрезку своей переменной, «внутри» которого этот спектр локализован. Это определение мы уже использовали в лекции 4 и подчеркнем еще раз, что такие *финитные функции* широко используются (см., например, [3]) и «финитность» всегда понимается в смысле ограничений на область существования функции, в то время как сами значения функции могут быть, вообще говоря, любыми (без ограничений).

Итак, мы пришли к важнейшему для всего дальнейшего рассмотрения заключению, имеющему смысл теоремы, которая определяет общее свойство решения прямой задачи:

ДН линейной антенны, отвечающая некоторому (произвольному) АФР, есть функция финитного спектра.

Но из него сразу следует и другое утверждение, которое имеет прямое отношение уже к обратной задаче:

для того, чтобы для некоторой заданной ДН нашлась функция АФР, которая в точности реализует заданную ДН, необходимо, чтобы эта ДН была функцией финитного спектра, и при этом ее спектр должен быть локализован на отрезке, не превосходящем по своей величине заданный отрезок определения АФР, т.е. фактический размер антенны.

Это и есть *необходимое условие существования точного решения* задачи синтеза линейной антенны. Оно звучит как математическая теорема, но смысл его совершенно ясен именно из физических соображений. Действительно, если антенна имеет конечный размер (он всегда конечный на практике), и если АФР имеет физический смысл спектральной функции для «своей» ДН (так оно и есть согласно уравнениям (7.3), (7.4)), то для реализации заданной ДН с помощью антенны заданного размера необходимо, чтобы ее спектр «умещался» в этом размере.

Таким образом, становится очевидным еще один важный вывод: выбор ДН не может быть *произвольным* при условии, что эта ДН должна быть *точно* реализована с помощью антенны ограниченного размера. И так же очевидно, что чем больше размер антенны (точнее, ее волновой размер), тем больше мы имеем практических возможностей для точного решения задачи синтеза, т.е. тем более разнообразные и остронаправленные ДН мы можем реализовать в окружающем антенну пространстве.

На следующей лекции мы рассмотрим, опираясь на эти важные выводы, методы точного синтеза линейной антенны, ответив на следующий по очередности вопрос: как найти АФР в том случае, если заданная ДН удовлетворяет необходимому условию существования точного решения для него?

Задание студентам:

постараться придумать такие варианты для заданной ДН, которые совершенно точно не смогут быть получены с помощью антенны конечного волнового размера (любого, даже очень большого) и тем самым понять (пока качественно), насколько важна роль волнового размера антенны как параметра, «управляющего» практическими возможностями решения обратной задачи.

Лекция 8. Точные методы синтеза антенны

Предыдущую лекцию мы завершили формулировкой и обсуждением физического смысла необходимого условия существования точного решения обратной задачи теории антенн в простейшей постановке – задачи синтеза линейной антенны в однородном свободном пространстве. В этой лекции мы обсудим методы получения точного решения в той ситуации, когда заданная ДН удовлетворяет этому условию, и нам остается только найти это решение — синтезировать антенну.

Простая геометрия антенны обуславливает относительную простоту методов решения поставленной задачи. Мы разберем два таких метода, они взаимно дополняют друга, причем их взаимосвязь принципиальна и обусловлена именно тем, что они точные и, следовательно, применимы в той ситуации, когда спектр заданной ДН является ограниченным в пределах заданного размера антенны.

В качестве исходного мы имеем уже хорошо знакомое нам уравнение, связывающее АФР антенны с ее ДН, которое в безразмерных переменных (7.2) имеет вид:

$$D(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(y) e^{-izy} dy \quad (8.1)$$

В принципиальном отличии от прямой задачи, когда это уравнение используется для нахождения ДН, сейчас нам нужно именно обратное – разрешить уравнение относительно АФР $F(y)$, но при том условии, что ДН $D(z)$ нам не только известна (задана), но удовлетворяет необходимому условию существования точного решения для АФР.

1. Метод интеграла Фурье (МИФ)

Этот метод решения задачи синтеза прямо следует из формулировки необходимого условия существования точного решения и потому нам уже фактически известен. Действительно, если заданная ДН удовлетворяет этому условию, значит, одновременно выполняются уравнения (7.3) и (7.4) предыдущей лекции. Первое из них есть уравнение для решения прямой задачи (для расчета ДН по заданному АФР), при этом заданная функция АФР финитна и удовлетворяет условию $F(y) = 0$ при $|y| \geq 1$, второе – уравнение для нахождения искомого решения обратной задачи (для расчета АФР по заданной ДН). Тогда уравнение (7.4), которое мы здесь повторим, и есть решение обратной задачи:

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) e^{iyz} dz \quad (8.2)$$

Таким образом, сам метод выглядит элементарно, и совершенно понятно, почему он так называется: для его реализации требуется только одно – сделать преобразование Фурье заданной ДН $D(z)$ и найти ее спектр по переменной y , этот спектр и будет искомой функцией АФР $F(y)$. Ясно, что необходимое условие существования точного решения играет здесь ключевую роль. Если оно не выполняется и спектр функции $D(z)$ не «укладывается» в пределы заданного отрезка $|y| \leq 1$, то заданная ДН сможет быть точно

реализованной только с помощью антенны большего волнового размера, чем заданная антенна, а это значит, что операция взятия интеграла Фурье (7.4), (8.2) не обеспечит точного решения синтеза именно для заданной антенны.

2. Метод парциальных диаграмм (МПД)

Несмотря на то, что в наших руках уже есть столь простой и понятный МИФ, далее мы познакомимся с еще одним методом, имеющим большое распространение в теории и технике антенн – методом парциальных диаграмм (МПД). Для антенн линейной конфигурации он тоже выглядит достаточно простым и понятным, но применимость его не ограничена именно такой геометрией антенны. По сути, та же идея, положенная в его основу, используется и в случае более сложных апертур, и вопрос здесь только в выборе подходящих (наиболее удобных) функций парциальных ДН.

Итак, в чем заключается идея метода? По существу, на нее указывает его название: в основе метода лежит использование некоторой системы парциальных (от латинского *partial* – частный, отдельный) диаграммных функций. Остается понять, каких именно функций, как они определяются для нашей линейной антенны и как конкретно формулируется этот метод.

С математической точки зрения, МПД основан на использовании универсального подхода к нахождению решений самых разных (интегральных или дифференциальных) уравнений, который широко используется в различных постановках. Этот подход основан на разложении искомого решения в ряд по тем функциям (парциальным функциям), которые нам заранее известны, но неизвестны коэффициента разложения, которые и требуется найти. Логика простая: найдем коэффициенты – просуммируем ряд известных слагаемых – получим решение. Естественно, сами эти парциальные функции выбираются не произвольно, но таким образом, чтобы они сами были решениями заданного уравнения и тем самым обеспечивали нахождение искомого решения в виде их суммы.

С физической точки зрения, такой подход заключается в поиске решения в виде суперпозиции отдельных гармоник, которые являются собственными гармониками для данной физической системы, которая описывается данным конкретным уравнением. Отсюда, из этой общей схемы, сразу видно то принципиальное ограничение на класс уравнений, которое здесь возникает: уравнение должно быть линейным, т.е. не должно содержать степеней искомой функции выше первой. Физические системы (и среды), которые описываются такими уравнениями, тоже называются линейными. Примеры подобных систем встречаются в физике и технике повсеместно, и большинство задач волновой физики, с которыми студенты уже познакомились на первых курсах, являются именно линейными. К примеру, классическая задача дифракции волны на отверстии в экране, с воспоминания о которой мы начали данный курс – типичный пример из этого ряда. Наше основное интегральное уравнение (6.1), (7.1) связи АФР и ДН антенны также является линейным, поэтому заранее ясно, что такой подход будет хорошо работать, если удастся найти подходящие парциальные гармоники. Подчеркнем, для полного понимания, что здесь речь идет о линейности задачи и линейности антенны как прибора, преобразующего поле на апертуре в волновое поле в окружающем пространстве, но не о

линейности антенны в смысле ее геометрии (она может быть гораздо более сложной и нелинейной, например, криволинейной, плоской и т.д.).

Таким образом, будем искать решение уравнения (8.1) для АФР $F(y)$ в виде суммы некоторых заранее «приготовленных» известных АФР $F_n(y)$:

$$F(y) = \sum_n C_n F_n(y), \quad n = -\infty, \dots, +\infty. \quad (8.3)$$

Подставляя этот ряд в исходное уравнение (8.1), получаем аналогичное представление для ДН в виде разложения в ряд по диаграммам $D_n(z)$:

$$D(y) = \sum_n C_n D_n(y), \quad (8.4)$$

где ДН $D_n(z)$ и АФР $F_n(y)$ связаны между собой тем же «антенным» уравнением, что и заданная ДН с искомым АФР:

$$D_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_n(y) e^{-izy} dy. \quad (8.5)$$

Диаграммы $D_n(z)$ и есть те самые парциальные ДН, которые дали название методу, а АФР $F_n(y)$ – соответственно, парциальные АФР.

Из уравнения (8.3) ясно видно, что для построения решения нам не хватает коэффициентов разложения C_n , поскольку они заранее не известны, как не известна и сама искомая функция АФР (очевидно). Но столь же очевидно, что мы можем их найти из уравнения (8.4), поскольку оно представляет собой разложение известной (заданной) ДН в ряд по известным парциальным диаграммам. Следовательно, ключ к пониманию МПД заключается в равенстве коэффициентов разложения искомого АФР и заданной ДН по соответствующим парциальным функциям, что, в свою очередь, с неизбежностью следует из их линейной связи, определяемой уравнением (8.1).

Таким образом, МПД заключается в выполнении следующих последовательных шагов:

- 1) найти предварительно (приготовить) системы парциальных функций – парциальные АФР $F_n(y)$ и отвечающие им парциальные ДН $D_n(z)$;
- 2) найти коэффициенты разложения C_n заданной ДН в ряд по парциальным ДН, используя для этого разложение (8.4);
- 3) найти искомое АФР $F(y)$, подставив найденные коэффициенты C_n в ряд (8.3).

Эта последовательность операций есть формулировка МПД в общем виде, без уточнения самих парциальных АФР и ДН.

Теперь нам предстоит разобраться, каким же именно образом мы можем найти эти необходимые «инструменты» в виде парциальных АФР и ДН и получить конкретный рецепт для применения данного метода в случае линейной антенны.

Прежде всего, сделаем общее замечание, которое касается требования к системе парциальных ДН. Это требование не является «жестким» (обязательным), но исходит из

практического удобства и заключается в том, что система парциальных ДН должна быть полной (в математическом смысле), т.е. парциальные ДН должны быть взаимно ортогональны друг другу и одинаковым образом нормированы, например, на единицу по величине полной мощности, отвечающей всему интервалу своей переменной (то есть, быть ортонормированными функциями). Это означает, что система парциальных ДН должна удовлетворять следующему условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_n(z) D_m^*(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_n|^2 dz \delta_{nm} = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} – дельта-символ Кронекера. При таком условии из разложения (8.4) легко получить систему уравнений для нахождения коэффициентов разложения C_n :

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) D_n^*(z) dz, \quad (8.6)$$

Следовательно, все коэффициенты находятся независимо друг от друга, и каждый из них есть проекция заданной ДН $D(z)$ на парциальную ДН с соответствующим номером. Сам термин «проекция» имеет здесь тот же смысл, что и в линейной алгебре для векторов, но с той лишь разницей, что «векторы» диаграммных функций имеют бесконечную размерность (поскольку они есть непрерывные функции), и потому суммы при нахождении скалярных произведений векторов заменяются интегралами вида (8.6).

Отметим также еще одну полезную аналогию с задачами линейной алгебры: требование полноты системы парциальных ДН для удобства ее использования полностью аналогично требованию ортогональности базиса векторов для того, чтобы использовать его для разложения произвольного вектора. Однако, если система парциальных ДН не удовлетворяет требованию полноты, то это не означает, что сам МПД становится неприменимым и теряет смысл. Это означает только, что реализация метода, требующая нахождения набора коэффициентов C_n из разложения (8.4), становится более сложной, поскольку в таком случае эти коэффициенты находятся более сложным образом и зависят друг от друга.

Разумеется, для антенн наиболее стандартных (базовых) конфигураций нужные для МПД системы парциальных ДН и парциальных АФР уже давно и хорошо известны. Известны они, естественно, и для линейной антенны.

Первым и самым простым примером такой «связки» является следующий:

$$F_n(y) = e^{-imy}, \quad D_n(z) = \frac{\sin(z - \pi n)}{(z - \pi n)}, \quad (8.7a)$$

или, если вернуться к исходным переменным:

$$F_n(x) = e^{ikx \sin \theta_n}, \quad \sin \theta_n = n \frac{\lambda}{L} \quad (8.7б)$$

$$(8.7в)$$

$$D_n(\theta) = \frac{\sin t_n}{t_n}, \quad t_n = \pi \frac{L}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_n)$$

В этом случае искомое решение задачи синтеза имеет привычный вид разложения в ряд Фурье:

$$F(y) = \sum_n C_n e^{im_y} \quad (8.8)$$

т.е. представляет собой суперпозицию парциальных АФР с постоянными АР и линейными ФР, при этом углы фазировки последних (углы компенсации) монотонно растут с ростом их номеров. В свою очередь, заданная ДН имеет разложение:

$$D(z) = \sum_n C_n \frac{\sin(z - \pi n)}{(z - \pi n)} \quad (8.9)$$

Итак, мы видим, что парциальные ДН представляют собой уже хорошо известные нам функции (8.7в), главные лепестки которых смещены друг относительно друга на определенные углы, при этом синусы направлений главных максимумов (8.7б) кратны обратному волновому размеру антенны. Веер главных лепестков парциальных ДН последовательно заполняет весь сектор видимых углов, но с разными весовыми коэффициентами C_n , и значения этих коэффициентов полностью определяются заданной ДН согласно разложению (8.9).

Отличительной чертой функций вида $\text{sinc}(z - \pi n)$ является, как известно, эквидистантное положение их нулей по оси z , которые следуют друг за другом точно через π . Отсюда следует очень привлекательное свойство системы парциальных ДН вида (8.7а): положение парциального главного максимума с некоторым номером n точно совпадает с положением нулей всех остальных парциальных диаграмм с номерами $m \neq n$. Но если так, тогда прямой подстановкой значения $z = \pi n$ в (7.9) легко получаем для коэффициентов разложения:

$$C_n = D(\pi n)$$

Таким образом, нам даже не приходится находить интегральные проекции (8.6) или пользоваться разложением (8.9) – коэффициенты C_n есть не что иное, как дискретные значения (отсчеты) самой заданной ДН в точках $z = \pi n$. Это радикально упрощает процедуру получения решения, и в итоге вместо пары разложений (8.8), (8.9) мы имеем, соответственно:

$$F(y) = \sum_n D(\pi n) e^{im_y} \quad (8.10)$$

$$D(z) = \sum_n D(\pi n) \frac{\sin(z - \pi n)}{(z - \pi n)} \quad (8.11)$$

Рисунок 8.1 качественно иллюстрирует суть МПД. Справа показана некоторая произвольная ДН $D(z)$, отсчеты которой $D(\pi n)$ (отмечены точками) следуют друг за

другом ровно через π , слева – веер главных лепестков парциальных ДН с разными номерами, начиная с нулевого (для центральной ДН), пунктиром отмечены отвечающие им парциальные ФР, углы наклона которых к оси антенны (парциальные углы фазировки) имеют те же значения, что и направления парциальных главных лепестков.

Следует обратить внимание, что эквидистантность отсчетов ДН $D(z)$ не означает такой же эквидистантности самих парциальных углов фазировки и направлений главных максимумов, поскольку переменная z связана с угловой переменной ϑ нелинейным образом через функцию синуса согласно замене переменных (7.2).

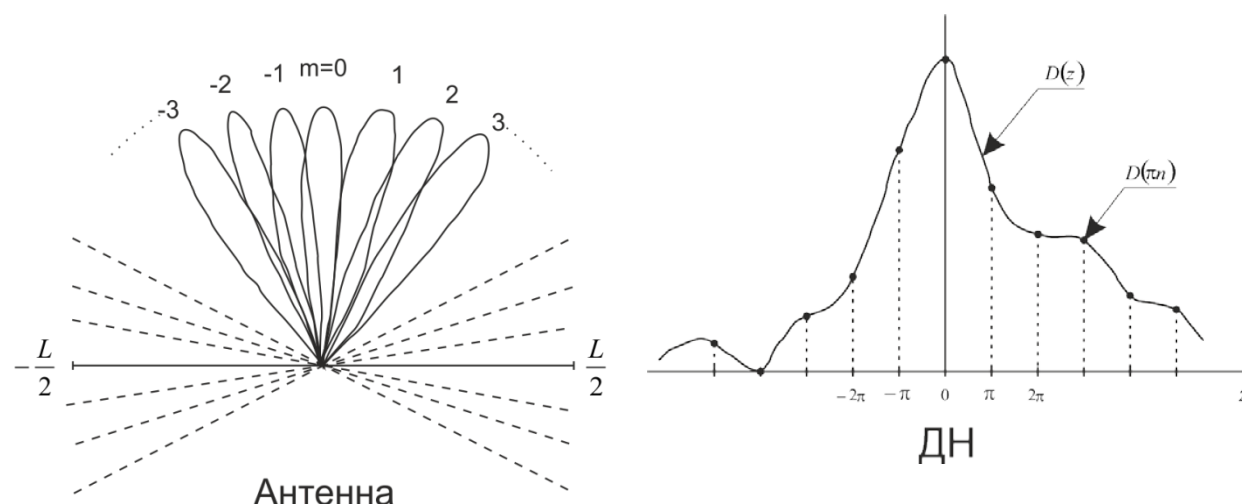


Рисунок 8.1. Иллюстрация к синтезу антенны методом парциальных ДН (качественный рисунок)

Как мы видим, МПД для линейной антенны тоже довольно прост и понятен, но возникает естественный вопрос: где и как в данном методе «сработало» то необходимое условие существования точного решения, которое так очевидно проявилось в предыдущем методе? Ответ на поверхности: это условие в явном виде проявилось в разложении (8.11).

Действительно, ряд такого вида есть не что иное, как точное (без остатка) разложение некоторого заданного «сигнала», в роли которого выступает ДН $D(z)$, в ряд по парциальным «сигналам» $D_n(z) = \text{sinc}(z - \pi n)$. Хорошо известно, что это возможно далеко не всегда, а тогда и только тогда, когда спектр заданного сигнала ограничен сверху некоторой максимальной частотой. Но это и означает, что сигнал является сигналом финитного спектра, при этом временной интервал сдвига парциальных сигналов, заполняющих собой заданный, обратно пропорционален его верхней частоте. На этот счет широко известна теорема отсчетов, часто цитируемая в отечественной литературе как теорема Котельникова; студентам факультета она знакома из общего курса радиотехники, к примеру. Но это и есть, по сути своей, необходимое условие существования точного решения нашей задачи, поскольку разложение вида (8.11) есть не что иное, как точное разложение заданной ДН в ряд Котельникова. Амплитудами этого ряда являются эквидистантные отсчеты ДН, следующие через равный интервал π , плотность их

следования по угловой переменной определяется обратным волновым размером антенны. Роль верхней частоты сигнала спектра здесь играет, очевидно, волновой размер антенны – чем он больше, тем плотнее «упакованы» парциальные ДН в угловом пространстве, согласно выражению для их углов фазировки (8.7б).

Задание студентам:

вспомнить материал, относящийся к теореме отсчетов (теореме Котельникова), сопоставить формулировку и следствия этой теоремы с условием существования точного решения задачи синтеза антенны (лекция 7) и с применимостью МПД как метода точного решения задачи.

Лекция 9. Точные методы синтеза линейной антенны. Примеры применения

Прежде чем рассмотреть конкретные примеры применения изложенных методов точного решения задачи синтеза, обратимся к некоторым общим следствиям из них. Анализ их нужен нам с практической целью – с тем, чтобы извлечь полезные «рецепты» для получения решений, не решая сами уравнения (8.2) (используя МИФ) или (8.10) (используя МПД).

Сначала обратимся к хорошо известным свойствам интегрального преобразования Фурье. Будем предполагать, что нам известна некоторая пара АФР $F_1(y)$ и ДН $D_1(z)$ для линейной антенны заданной длины, которые удовлетворяют уравнениям (8.1), (8.2). Задается ДН $D(z)$, которая (мы видим) определенным образом связана с ДН $D_1(z)$. Каким образом должна быть формализована эта связь, чтобы непосредственно из АФР $F_1(y)$ получить искомое АФР $F(y)$, не обращаясь при этом к процедуре Фурье-преобразования заданной ДН $D(z)$, и как именно его при этом получить? Нужных для этого свойств преобразования Фурье известно несколько, и все они должны быть известны студентам из общего курса радиотехники (как минимум), поэтому ниже они приведены без доказательств, которые весьма простые.

- 1) Сдвиг (угловой перенос) ДН.

Если $D(z) = D_1(z + z_0)$, где $z_0 = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta_0$, то имеем для искомого АФР:

$$F(y) = F_1(y) e^{iz_0 y}, \quad F(x) = F_1(x) e^{ikx \sin \theta_0} \quad (9.1)$$

Согласно этому свойству, мы получили простой рецепт решения обратной задачи: смещенная на некоторый угол θ_0 ДН обеспечивается добавлением к АФР линейного фазового распределения, имеющего тот уже угол наклона к оси антенны (т.е. дополнительного угла фазировки). По сути, мы уже знаем этот рецепт из анализа прямой задачи: такой сдвиг ДН обеспечивается изменением угла фазировки, но в данном случае мы используем технику сканирования «наоборот» – не для управления ДН, а для получения точного решения задачи синтеза АФР по заданной ДН.

2) Масштабирование ДН.

Если ДН $D(z) = D_1(\alpha z)$, где α – некоторый положительный множитель (масштабный коэффициент), то имеем для искомого АФР:

$$F(y) = \frac{1}{\alpha} F_1\left(\frac{y'}{\alpha}\right), \quad |y'| \leq \alpha \quad (9.2)$$

Согласно этому свойству, получаем еще один простой рецепт решения: масштабирование известной ДН (сжатие или растяжение по углу без изменения формы) обеспечивается обратным масштабированием АФР. Следовательно, для «сжатия» ДН по углу (если множитель $\alpha > 1$) нужно «растянуть» отвечающее ей АФР на увеличенную в α раз апертуру, и наоборот. По сути, этот рецепт нам тоже уже известен из анализа прямой задачи – мы видели, что с изменением волнового размера антенны ширина главного лепестка ее ДН (и всех других боковых лепестков) изменяется в обратной пропорции.

Задание студентам:

используя материал лекции 5, в которой рассмотрена ДН фазированной антенны, сопоставить полученные там результаты решения прямой задачи с приведенными здесь выводами по обратной задаче и убедиться в их взаимном соответствии.

3) Производные от ДН.

Если ДН $D(z) = \frac{dD_1(z)}{dz}$ (в более общем случае, $D(z) = \frac{d^n D_1(z)}{dz^n}$), то имеем для АФР:

$$F(y) = (iy)^n F_1(y) = F_1(y) y^n e^{in\pi/2} \quad (9.3)$$

Согласно этому свойству, искомое АР антенны умножается на степенную функцию с соответствующим порядком производной показателем, в то время как к искомому ФР добавляется постоянный фазовый сдвиг на соответствующее число $n\frac{\pi}{2}$, который не меняет формы ДН, но добавляется к фазе самой ДН (формально, этот сдвиг может быть вынесен из-под знака интеграла в уравнении (8.1) и потому он «не участвует» в формировании ДН, тем более, по мощности).

Для формулировки следующих свойств нам потребуется еще одна пара «вспомогательных» функций АФР и ДН: $F_2(y)$, $D_2(z)$, которые также предполагаются заранее известными. Речь пойдет, как можно догадаться, о двух дополняющих друг друга свойствах свертки.

4) Свертка двух ДН.

Если $D(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(z') D_2(z - z') dz'$, то имеем для АФР:

$$F(y) = F_1(y) F_2(y), \quad |y| \leq 1 \quad (9.4)$$

Смысл этого «рецепта» также совершенно ясен: если заданная ДН является сверткой двух других диаграмм, для которых известны свои АФР, то искомое АФР есть их произведение.

5) Произведение двух ДН.

Для формулировки этого свойства и отвечающего ему рецепта решения обратной задачи нам потребуется уточнение постановки задачи для вспомогательных АФР и ДН. Будем полагать, что они определяются следующей парой уравнений вида (7.1):

$$D_1(z) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} F_1(y) e^{-izy} dy' \quad (9.5)$$

$$D_2(z) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} F_2(y) e^{-izy} dy' , \text{ при этом } \sigma_1 + \sigma_2 = 1$$

Следовательно, нам должны быть известны решения прямой и обратной задач для двух линейных антенн с меньшими, чем заданная антенна, размерами, но взаимно согласованными в смысле выполнения последнего равенства. Тогда мы имеем для искомого АФР следующий результат:

$$F(y) = \frac{1}{2} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} F_1(y') F_2(y - y') dy' , \quad |y - y'| \leq \sigma_2 \quad (9.6)$$

Смысл этого рецепта также совершенно ясен: при выполнении условий (9.5) мы получили АФР на заданной антенне в виде свертки двух вспомогательных АФР (случай, обратный предыдущему).

Для закрепления материала рассмотрим простой пример применения последнего из приведенных правил. Зададим ДН в следующем виде:

$$D(z) = \left(\frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}{z} \right)^2 \quad (9.7)$$

Это значит, что мы имеем попарно совпадающие две ДН и два АФР:

$$D_1(z) = D_2(z) = \frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}{z} , \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$$

$$F_1(y) = F_2(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |y| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Решение задачи синтеза путем свертки столь простых АФР можно легко получить аналитически (непосредственной их подстановкой в (9.6)) или графически, используя хорошо известную и наглядную интерпретацию интеграла свертки как площади пересечения двух фигур, ограниченных «сворачиваемыми» функциями. Площадь пересечения меняется в зависимости от их взаимного положения, когда одна из фигур центрирована в нуле координат (при $y' = 0$), а вторая фигура движется вдоль оси в соответствии с изменением координаты y , в результате чего площадь пересечения изменяется и становится функцией y . В данном случае эти две фигуры одинаковы и предельно просты: они являются квадратами единичной площади. В результате их свертки получаем «треугольное» решение, которое показано на рис. 9.2.

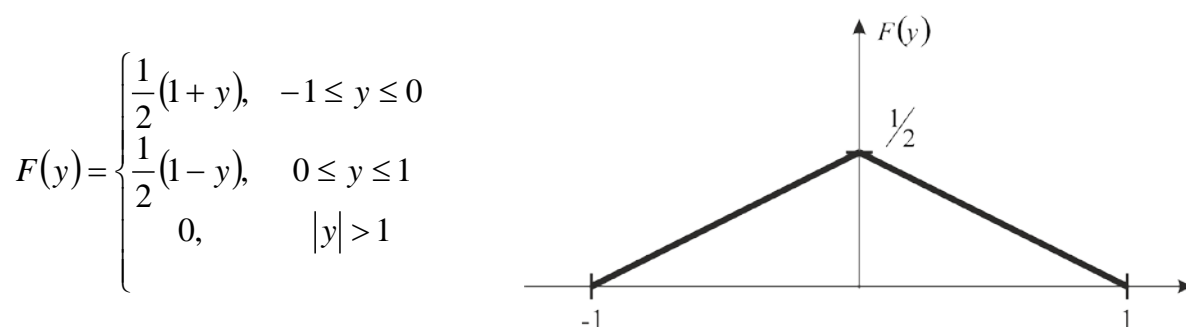


Рисунок 9.2. Решение задачи синтеза антенны для заданной ДН (9.7)

Совсем не удивительно, что полученное АФР оказалось чисто амплитудным и со спадающими к краям антенны значениями. В предыдущей лекции мы рассматривали синфазные антенны с АР такого вида – т.н. аподизированные антенны. Было показано, что такие антенны имеют расширенный главный лепесток (в сравнении с антеннами без аподизации). Но именно таким свойством – уширенным главным лепестком – обладает ДН (9.7), если сравнить ее с «опорной» ДН антенны той же длины, но обладающей равномерным амплитудным распределением (в этом легко убедиться самостоятельно). Что же касается ФР, то обе «вспомогательные» антенны являются синфазными, поэтому синтезированная антенна тоже является синфазной, другому распределению фазы вдоль ее апертуры взяться просто неоткуда. Следовательно, для ДН (9.7) мы должны были получить синфазную антенну с аподизированным АР, именно такой результат мы и получили.

Задание студентам:

решить аналогичную задачу синтеза антенны для ДН:

$$D(z) = \frac{\sin\left(\frac{z}{4}\right)\sin\left(\frac{3z}{4}\right)}{z^2}$$

Обратимся теперь к анализу общих свойств МПД и затем примеру его применения.

Согласно (8.10), синтез АФР антенны на основе МПД осуществляется путем суммирования ряда Фурье, амплитудами которого оказываются отсчеты заданной ДН. Следовательно, для решения конкретных задач синтеза этим методом могут быть использованы известные общие свойства рядов Фурье.

В общем случае для ДН произвольного вида (но с необходимостью обладающей финитным спектром), имеем выражение для АФР в виде суммы косинусных и синусных гармоник комплексного ряда Фурье:

$$F(y) = D(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [D(\pi n) + D(-\pi n)] \cos(\pi n y) + i [D(\pi n) - D(-\pi n)] \sin(\pi n y) \} \quad (9.8)$$

Отсюда следует, что если заданная ДН является четной функцией, то искомое АФР также является четной функцией, симметричной относительно центра антенны, и наоборот:

$$D(z) = D(-z) \Rightarrow F(y) = F(-y)$$

$$D(z) = -D(-z) \Rightarrow F(y) = -F(-y)$$

В качестве любопытного примера использования МПД как эффективного метода решения задачи синтеза антенн, рассмотрим задачу синтеза антенны по ДН следующего параметрического вида (величина ψ является параметром) [2, с. 36]:

$$D(z) = \frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}{\frac{z}{2}} \cos\left(\frac{z}{2} + \psi\right) \quad (9.9)$$

Видно, что при произвольной величине ψ такая ДН не обладает каким-либо из отмеченных выше свойств симметрии, следовательно, нам необходимо обратиться к общему выражению (9.8) и попытаться просуммировать этот ряд. Заметим, прежде всего, что из этого ряда выпадают гармоники всех четных номеров в силу нулевых значений четных отсчетов ДН: $D(2\pi n) = 0$. Тогда, подставив значения нулевого и нечетных отсчетов, получим для искомого АФР выражение:

$$F(y) = \cos \psi + 4i \sin \psi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi y}{(2n-1)\pi}$$

Полученная здесь сумма тригонометрического ряда известна [Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений], и она имеет на удивление простой вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi y}{(2n-1)\pi} = \begin{cases} 1/4, & 0 \leq y \leq 1 \\ -1/4, & -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

В результате, легко получаем искомое АФР в виде двух «стыкованных» в центре антенны АФР, которые имеют сопряженные и постоянные (по своим отрезкам) фазы, равные по модулю параметру ψ , и равномерные (единичные) амплитуды:

$$F(y) = \begin{cases} \exp(i\psi), & 0 \leq y \leq 1 \\ \exp(-i\psi), & -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что согласно (7.2), параметру ψ отвечает определенный угол фазировки θ_ψ , который находится из условия:

$$\sin \theta_\psi = \left(\pi \frac{L}{\lambda} \right)^{-1} \psi$$

Примечательно, что в зависимости от выбора величины ψ , заданная ДН принимает различный вид, но вид АФР при этом сохраняется, в нем меняется только величина фазы вдоль антенны на ее левом и правом половинных отрезках. Например, для самого простого случая $\psi = 0$ имеем хорошо известный нам вариант синфазной антенны:

$$D(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad F(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases}$$

Для случая $\psi = \frac{\pi}{2}$ заданная ДН становится совершенно другой: она имеет два антисимметричных главных лепестка, смещенных относительно нулевого угла, и нулевое значение, вместо главного максимума, при нулевом угле (модуль ДН имеет симметричные главные лепестки, т.е. ДН по мощности является «двухлепестковой»):

$$D(z) = \frac{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)}$$

На рис. 9.3 [2, с. 36-37] приведены два примера ДН (9.9), отвечающие значениям $\psi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{4}$. Из сравнения всех трех диаграмм, включая отмеченный «двухлепестковый» вариант для $\psi = \frac{\pi}{2}$, хорошо видно, что ДН качественно трансформируется при изменении параметра ψ , в то время как АФР сохраняет свою форму. Этот пример убедительно показывает, что комбинируя линейные антенны даже с самыми простыми АФР, можно получить различные по своему виду ДН и эффективно ими управлять.

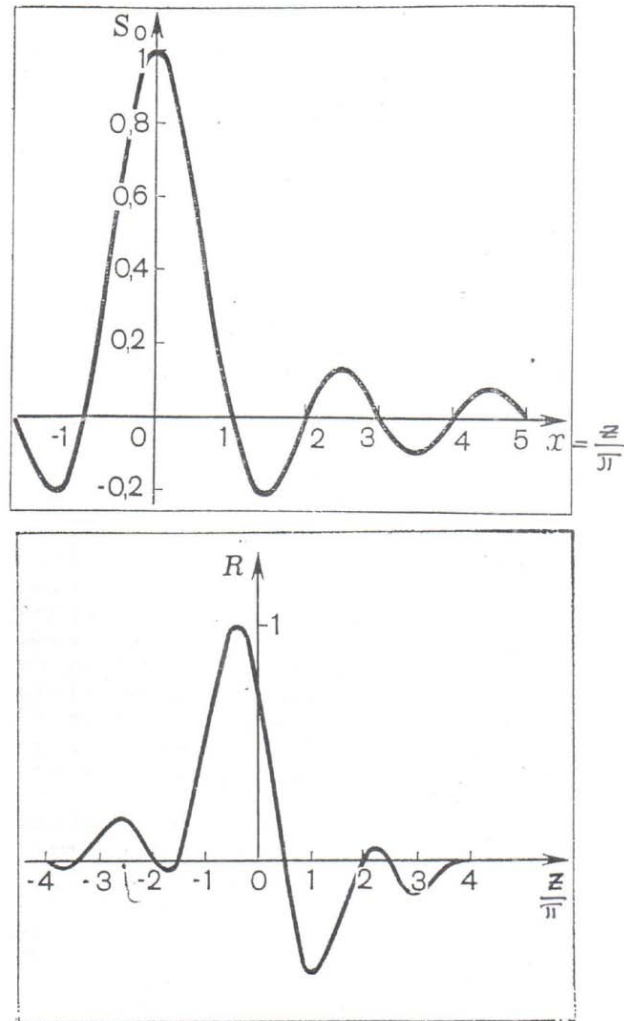


Рисунок 9.3. Примеры ДН (9.9) для значений параметра $\psi = 0$ (вверху), $\psi = \frac{\pi}{4}$ (внизу) [2]

Этим несложным примером мы завершим знакомство с двумя основными методами точного решения задачи синтеза линейной антенны и рассмотрим далее методы нахождения приближенных решений.

Лекция 10. Приближенные методы синтеза антенны

На предыдущих двух лекциях мы рассмотрели точные методы решения задачи синтеза линейной антенны в рамках уравнения (8.1), когда заданная ДН $D(z)$ удовлетворяет необходимому условию существования такого решения. Были рассмотрены два таких метода, разные в своей реализации, но взаимосвязанные через это условие — для нахождения АФР $F(y)$ в обоих методах используется условие финитного спектра заданной ДН в определенных размерами антенны пределах (на «антенном» отрезке $|y| \leq 1$).

Сейчас мы рассмотрим другую постановку задачи синтеза антенны, когда такое условие на ДН заранее не накладывается, и будем исходить из того, что синтезированному АФР может отвечать ДН, отличная от заданной. В такой постановке задача синтеза

является более общей, поскольку точное решение здесь – только частный случай, означающий, что ДН обладает «нужным» спектром, и мы сумели его реализовать на заданной антенне. Во всех других случаях решение задачи оказывается *приближенным*.

Из этих предварительных замечаний следует ближайший план наших действий. Прежде всего, нужно определить, каким образом мы будем количественно характеризовать расхождение (как часто говорят в подобных случаях — невязку) заданной ДН и полученной ДН, что даст нам возможность контролировать качество приближенного решения для АФР. Далее, опираясь на это определение, мы поставим задачу поиска *оптимального* приближенного решения, которое обеспечит минимально возможную величину невязки этих двух диаграмм. Естественно ожидать, что такое решение может оказаться достаточно или даже слишком сложным для реализации. Тогда необходимо придумать «компромиссный» метод получения решения с учетом дополнительных ограничений, который заведомо не обеспечит наилучшего приближения ДН к заданной, но сделает АФР практически реализуемым.

Отметим, что подобный подход к рассмотрению задачи синтеза антенны, ориентированный на получение приближенного решения, применим и в том случае, когда заданная ДН полностью удовлетворяет условию существования точного решения. Но и в этом случае дополнительные ограничения (например, на пиковые значения АФР) могут иметь место и даже быть необходимыми. Следовательно, точное решение может оказаться «избыточным» по своей сложности, и тогда необходимо искать приближенное решение. Это еще раз указывает на то, что приближенный синтез – наиболее общий и практичный подход к постановке и решению задачи синтеза антенны.

1. Критерий и постановка задачи приближенного синтеза антенны

Итак, теперь мы будем оперировать двумя диаграммами. Первая – по-прежнему, та ДН $D(z)$, которую мы задаем при постановке задачи синтеза и для которой пытаемся найти АФР $F(y)$ строго на отрезке $|y| \leq 1$. Но получаем в результате ДН $R(z)$, которая может быть отлична от заданной, что и указывает на то, что найденное решение задачи синтеза оказывается не точным, но приближенным. Эта диаграмма и искомое АФР взаимосвязаны, очевидно, уравнением (8.1) со всеми вытекающими отсюда спектральными смыслами:

$$R(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(y) e^{-izy} dy, \quad F(y) = 0, \quad \text{при } |y| > 1 \quad (10.1)$$

Обозначения диаграмм здесь не просто буквы, но имеют определенный смысл: $D(z)$ – от англ. *desired* (желаемая, ожидаемая, в нашем случае – заданная), $R(z)$ – от англ. *realized* (реализованная). К слову, для самой диаграммы направленности в англоязычной литературе по антеннам стандартно используются термины *directivity pattern*, *beam pattern*.

Теперь остановимся на вопросе о том, как нам количественно характеризовать ожидаемое различие этих двух ДН. Поскольку речь идет о различии функций, причем не отдельных их значений для некоторых выборочных значений переменной z , но для некоторого интервала, то кажется очевидным, что это должна быть интегральная

величина, «накапливающая» разницу значений двух диаграмм на всем заданном интервале. Определение нужной нам для этого величины хорошо известно, оно широко используется во многих областях – это *среднестепенная норма невязки* двух функций на заданном интервале их аргумента. В наших обозначениях такое определение имеет вид:

$$J_S = \left\{ \int_Z |D(z) - R(z)|^S \eta(z) dz \right\}^{1/S}, \quad (10.2)$$

где Z – интервал определения невязки, $\eta(z)$ – весовая функция, которая выбирается для того, чтобы увеличить (уменьшить) вклад отдельных отрезков или значений переменной z внутри интервала в интегральную величину невязки, S – степень нормы (целое положительное число). Сам термин «невязка» является общепринятым для подобного рода задач, его следует понимать как синоним отклонения.

Наиболее часто определение (10.2) используется для случая $S = 2$, в этом случае невязка называется *среднеквадратичной со взвешиванием*:

$$J_2 = \left\{ \int_Z |D(z) - R(z)|^2 \eta(z) dz \right\}^{1/2} \quad (10.3)$$

Наравне с этим, особое значение в теории антенн имеет случай $S = \infty$, при котором фиксируется максимальное на интервале Z значение модуля разности диаграмм, также со взвешиванием:

$$J_\infty = \max_{z \in Z} \{ |D(z) - R(z)| \eta(z) \}. \quad (10.4)$$

Эта норма получила название *чебышевской нормы* в честь выдающегося русского математика П.Л. Чебышева (1821 – 1894 гг.), поскольку его результаты по методам аппроксимации функций на конечном интервале, хотя и почти столетие спустя, были положены в основу решения ряда практически важных задач синтеза антенн на основе невязки (10.4).

Для упрощения задачи, в дальнейшем мы будем рассматривать приближенный синтез при условии $\eta(z) = 1$. В этом случае определение (10.3) совпадает со стандартным определением *среднеквадратичного отклонения* (СКО) двух диаграммных функций:

$$J_2 = \left\{ \int_Z |D(z) - R(z)|^2 dz \right\}^{1/2} \quad (10.5)$$

Используя введенное определение невязки, мы можем теперь точнее сформулировать задачу приближенного синтеза антенны. Итак, *задаются*:

- 1) линейная антенна фиксированного размера и некоторая (но уже произвольная, без ограничений на спектр) ДН $D(z)$,
- 2) способ определения (расчета) невязки, например, в виде СКО (10.5).

Требуется найти:

- 1) найти такое АФР $F(y)$, чтобы отвечающая ему ДН $R(z)$ обеспечивала минимум величины невязки с заданной диаграммой, или, с учетом

дополнительно заданных ограничений, чтобы ее значение было не больше некоторой пороговой величины J_0 :

$$J_2(F(y)) \rightarrow \min \text{ или } J_2(F(y)) \leq J_0 \quad (10.6)$$

2) минимально возможную величину невязки.

Условие (10.6) есть формулировка критерия качества приближенного решения и указывают цель, к которой мы стремимся при решении задачи синтеза антенны. Если мы добиваемся минимально возможной величины невязки, то можем говорить о нахождении оптимального приближенного решения. Если величина J_2 превосходит ее, то решение заведомо неоптимальное, но может оказаться практически приемлемым и, в этом смысле, эффективным. Наконец, если невязка минимизирована до нулевого значения, то это означает, что мы реализовали точное решение, т.е. имеем точное равенство $R(z) = D(z)$. Очевидно, для этого заданная ДН должна удовлетворять необходимому условию существования точного решения, иначе точное решение не окажется возможным в принципе. Далее мы увидим, что выбор интервала невязки Z имеет принципиальное значение – он может быть выбран бесконечным или конечным, и это оказывает качественное влияние на выбор метода и результат решения задачи.

С математической точки зрения, решение задачи синтеза антенны в данной постановке заключается в поиске диаграммной функции $R(z)$, удовлетворяющей условию существования точного решения (естественно) и обеспечивающей наилучшую аппроксимацию заданной функции $D(z)$ на заданном интервале. По сути, это задача аппроксимации заданной функции с помощью функции из определенного класса, и мы уже знаем, из какого именно класса – из класса тех функций, финитный спектр которых «укладывается» в заданный интервал оси u , определяемый размером антенны. В силу этого приближенный синтез антенны часто называют аппроксимационным синтезом, поскольку он строится на основе процедуры аппроксимации, а диаграмму $R(z)$ — аппроксимирующей диаграммой.

2. Бесконечный интервал аппроксимации заданной ДН. Метод интеграла Фурье как метод приближенного синтеза антенны

Первым и более простым сюжетом приближенного синтеза является случай бесконечного интервала обобщенной угловой переменной, для которого мы ставим задачу минимизации невязки с помощью ДН $R(z)$ финитного спектра, и поиска АФР $F(y)$ для этой аппроксимирующей диаграммы. Покажем, что тот метод, который мы уже знаем как метод точного решения задачи синтеза – метод интеграла Фурье (МИФ) — применим и в этом случае.

Прежде всего, уточним выражение для среднеквадратичной невязки, которую мы минимизируем, возведя ее в квадрат (чтобы не отвлекаться затем на извлечение корня):

$$J = J_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |D(z) - R(z)|^2 dz \rightarrow \min \quad (10.7)$$

Эту величину можно трактовать, по ее физическому смыслу, как мощность излучения, отвечающая разностной ДН в заданном интервале обобщенной угловой переменной. Очевидно, минимизация этой величины путем подбора «правильной» ДН $R(z)$ приведет к минимизации и самой невязки (10.5), т.е. наш отказ от извлечения корня не влияет на результат. В дальнейшем мы будем использовать именно величину (10.7) в качестве критерия качества искомого решения задачи приближенного синтеза антенны.

Запишем выражение для спектра заданной ДН $D(z)$:

$$F_D(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(z) e^{izy} dz \quad (10.8)$$

Найденная отсюда функция $F_D(y)$ есть не что иное, как АФР, имеющее своей диаграммой заданную $D(z)$, а само уравнение (10.8) – запись уже знакомого нам МИФ для поиска такого АФР (нижний индекс D указывает здесь на «принадлежность» АФР заданной ДН). Поскольку мы не наложили заранее на $D(z)$ ограничения, касающегося ее спектра, то АФР (10.8) «не обязано» быть локализованным внутри интервала $|y| \leq 1$. Действительно, АФР $F_D(y)$ может быть локализованным, но на отрезке большего размера или даже на бесконечном отрезке, т.е. может и не быть финитным.

Сделаем теперь простую операцию: обратим в ноль те «хвосты» функции $F_D(y)$, которые оказались за пределами отрезка $|y| \leq 1$, т.е. построим АФР следующего вида:

$$F_R(y) = \begin{cases} F_D(y), & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases} \quad (10.9)$$

Нижний индекс R указывает на то, что это АФР относится уже к реализуемой ДН $R(z)$, для которой мы получаем выражение:

$$R(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_R(y) e^{-izy} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_D(y) e^{-izy} dy \quad (10.10)$$

То, что ДН $R(z)$ оказалась связанной с «чужим» АФР $F_D(y)$ тем же интегральным уравнением, не должно вызывать никакого удивления. Напротив, это очевидно, поскольку АФР $F_R(y)$, согласно (10.9), есть «почти» АФР $F_D(y)$, их отличия относятся только к интервалам значений y за пределами «антенного» отрезка. Ключевое в данном случае утверждение заключается в том, что полученное таким образом АФР $F_R(y)$ и ДН $R(z)$ дают не просто приближенное, но оптимальное приближенное решение, обеспечивающее минимально возможную величину невязки (10.7). Другими словами, решение задачи приближенного синтеза находится в данном случае путем Фурье-преобразования заданной диаграммы с дополнительной коррекцией полученного спектра с помощью (10.9). Поскольку единственной расчетной операцией, которая здесь требуется, является нахождение спектра диаграммы $D(z)$ согласно (10.8), метод естественно назвать методом интеграла Фурье, но уже для приближенного синтеза антенны.

Рисунок 10.1 качественно иллюстрирует данный метод. Видно, что значения АФР $F_D(y)$ (здесь изображено только АР) выходят далеко за пределы отрезка $|y| \leq 1$, и по этой причине оно не может быть использовано в качестве точного решения. Но «обрезанное» АФР $F_R(y)$ (10.9) специально построено таким образом, чтобы локализовать его внутри этого отрезка, следовательно, ДН $R(z)$ имеет необходимый для синтеза антенны финитный спектр и может быть выбрана в качестве аппроксимирующей ДН. Остается только показать, что это действительно наилучшая аппроксимация заданной ДН по критерию минимума среднеквадратичной невязки (10.7), и тогда АФР (10.9) – искомое оптимальное АФР.

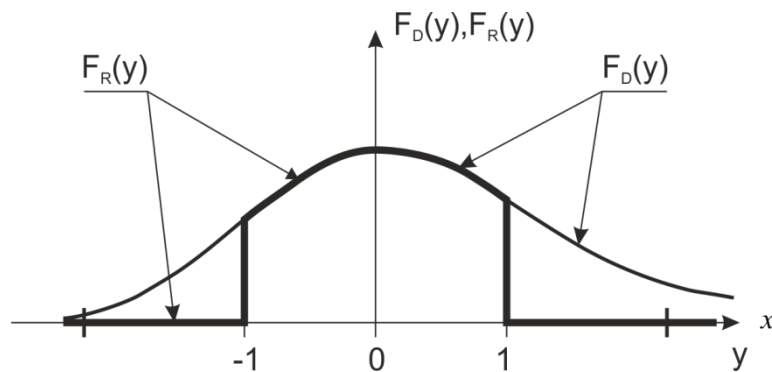


Рисунок 10.1. Поясняющая иллюстрация к методу интеграла Фурье для приближенного синтеза антенны

Доказательство сделанного утверждения не кажется сложным, хотя и требует некоторой аккуратности. Для этого надо расписать выражение для квадрата невязки (10.7), раскрыв квадрат модуля под интегралом, и затем привести выражение для невязки к виду, где в явном виде будет присутствовать слагаемое, определяемое модулем разницы АФР $F_D(y)$ и $F_R(y)$ на интервале $|y| \leq 1$. При этом надо воспользоваться известным в теории Фурье–анализа равенством Парсеваля, которое, по своему физическому смыслу, есть закон сохранения энергии сигнала – полная энергия сигнала, собираемая по всему интервалу его длительности и по всей его частотной полосе, должна быть одной и той же. В нашем случае роль сигнала (как функции времени) играет АФР, роль его спектра – ДН, и тогда нужные нам два равенства Парсеваля имеют вид:

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} |F_R(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |R(z)|^2 dz \quad (10.11)$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_D(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |D(z)|^2 dz$$

Следует обратить внимание, что во втором равенстве пределы интегрирования интенсивности АФР $F_D(y)$ являются бесконечными, поскольку мы не накладываем заранее никаких ограничений на область локализации спектра ДН $D(z)$.

Итак, раскрываем квадрат модуля под интегралом в (10.7):

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} |D(z)|^2 dz + \int_{-\infty}^{+\infty} |R(z)|^2 dz - J_1 - J_1^*, \text{ где}$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(z) D^*(z) dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} D^*(z) \int_{-1}^1 F_R(y) e^{-izy} dy dz = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 F_R F_D^* dy$$

$$J_1 + J_1^* = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_R|^2 dy + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_D|^2 dy - \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_R - F_D|^2 dy$$

и в результате имеем для невязки выражение:

$$J = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_D|^2 dy - \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_D|^2 dy + \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_R - F_D|^2 dy$$

Здесь три слагаемых, причем от АФР $F_R(y)$ зависит только последнее и оно неотрицательное. Следовательно, минимум невязки достигается именно при условии (10.9), которое обращает в ноль это слагаемое, и в результате минимальная невязка равна:

$$J_{\min} = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_D|^2 dy - \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 |F_D|^2 dy = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{-1} |F_D|^2 dy + \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} |F_D|^2 dy \quad (10.12)$$

Полученное выражение показывает, что минимум невязки полностью определяются значениями АФР $F_D(y)$ за пределами апертурного отрезка – суммарной мощностью тех «хвостов» этой функции, которые мы принудительно обратили в ноль при построении из нее приближенного решения $F_R(y)$ (10.9). Ясно, что если эта величина относительно мала, то и минимальная невязка будет также невелика, и наоборот.

Таким образом, мы имеем здесь сразу два важных результата:

- 1) строгое доказательство сделанного утверждения о том, что метод МИФ с учетом (10.9) дает наилучшее приближенное решение по критерию минимума невязки (10.7);
- 2) выражение для минимальной величины невязки, превзойти которую (в смысле дальнейшего уменьшения) не возможно, если только не увеличивать дополнительно размер антенны.

Второй вывод указывает с очевидностью на то, что если мы увеличим длину антенны до границ спектра заданной ДН $D(z)$ (для качественного рис. 8.1 – примерно в два раза), то полученное приближенное решение будет точным, а сама ДН – той диаграммой, которая удовлетворяет необходимому условию существования точного решения. Если же длина антенны становится асимптотически бесконечной, то у нас не остается никаких формальных и физических ограничений на синтез антенны по любой заданной ДН.

Задумаемся теперь над таким качественным вопросом: при каких свойствах заданной ДН ее спектр, т.е. реализующая такую ДН функция АФР, будет иметь достаточно высокие значения за пределами заданного апертурного отрезка $|y| \leq 1$, а минимально возможная невязка окажется относительно большой?

Ответ кажется очевидным, если хорошо понимать, что есть спектр и как он связан с исходным «сигналом». Такая ситуация будет тогда, когда ДН имеет достаточно резкие «фронты» своих лепестков (не обязательно при этом главного лепестка, хотя, как правило, именно его форма в наибольшей степени представляет интерес для разработчиков). Это означает, физически, что для хорошей аппроксимации (с малой невязкой) такой «резкой» диаграммы необходимо привлекать высокие гармоники ее спектра, а это и есть требование увеличения размеров антенны. С другой стороны, математической, такие свойства заданной ДН означают, что она обладает высокими значениями своей производной в отдельных точках (углах). Следовательно, необходимое условие существования точного решения задачи синтеза есть, по существу, ограничение на значения производной заданной ДН. Если эти производные принимают слишком высокие значения (по модулю), пусть и в отдельных точках, то такая ДН не может быть реализована точно, и чем выше эти значения, тем хуже будет полученное оптимальное решение с точки зрения достигнутого минимума невязки. Но в каком смысле «слишком высокие»? – именно в том, что заданная длина антенны оказывается недостаточной для реализации такой ДН, т.е. она «не дотягивает» до ширины ее спектра.

В завершение лекции определим полезные соотношения связи между заданной ДН и аппроксимирующей ДН, построенной с помощью МИФ:

$$R(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(z') \frac{\sin(z - z')}{z - z'} dz' \quad (10.13)$$

$$R(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D(\pi n) \frac{\sin(z - \pi n)}{z - \pi n}, \quad R(\pi n) = D(\pi n) \quad (10.14)$$

Первое выражение указывает на то, что оптимальная ДН $R(z)$ есть свертка заданной ДН $D(z')$ со «скользящей» ДН $D(z, z') = \text{sinc}(z - z')$. Этот результат есть прямое следствие синтеза АФР $F_R(y)$ на основе (10.9) как произведения двух АФР. Второе выражение есть прямое следствие МПД, тесно связанного с МИФ, и оно явно указывает на важную роль в получении приближенного решения парциальных ДН вида $\text{sinc}(z - \pi n)$, которые, как мы уже знаем, хорошо «работают» и в точном решении (см. лекцию 8). Видно также, что хотя ДН $R(z)$ является сглаженной по сравнению с ДН $D(z)$ функцией (в результате уменьшения ширины ее спектра), но совпадает с ней в эквидистантных точках $z = \pi n$.

Задание студентам:

доказать равенства (10.13), (10.14), применив МИФ и МПД, соответственно.

Итак, мы видим, что преобразование Фурье и парциальные ДН $\text{sinc}(z - \pi)$ снова оказались рабочими «инструментами» решения задачи синтеза, на этот раз – для нахождения оптимального приближенного решения. Этот факт является математическим следствием того, что система таких парциальных функций обладает полнотой (взаимной ортогональностью и одинаковой нормировкой) на *бесконечном* интервале своей переменной, но именно этот интервал и был использован нами для формулировки критерия (10.7) и постановки задачи. Известно, однако, что на любом *конечном* интервале обобщенной угловой переменной z эта система не обладает таким свойством. Это означает, что вопрос о поиске наилучшего (оптимального) приближенного решения для ограниченного сектора углов остается открытым. Можно ожидать только, что МИФ не окажется здесь столь же эффективным, поскольку его применимость последовала непосредственно из критерия (10.7). На следующей лекции мы попытаемся разобраться, чем и как его можно заменить, чтобы решить задачу приближенного синтеза антенны для конечного интервала аппроксимации заданной ДН.

Лекция 11. Приближенные методы синтеза линейной антенны (продолжение)

На предыдущей лекции мы рассмотрели задачу приближенного синтеза линейной антенны в постановке, когда заданная ДН $D(z)$ аппроксимируется реализуемой ДН $R(z)$ на бесконечном интервале обобщенной угловой переменной z (7.2). Качество аппроксимации мы характеризовали величиной «энергетической» невязки (10.7), минимизация которой позволила нам получить оптимальное приближенное решение для искомого АФР (10.9) антенны. Полученный результат оказался неожиданно простым: для получения такого решения требуется сделать преобразование Фурье заданной диаграммы, т.е. найти ее спектр $F_D(y)$, и, если он «не укладывается» в пределах заданного размерами антенны отрезка $|y| \leq 1$, занулить все его значения за пределами этого отрезка. Такой «обрезанный» спектр заданной ДН и есть оптимальное решение для АФР $F_R(y)$, при этом суммарная мощность антенны, оставшаяся за пределами антенного отрезка (отвечающая значениям $|y| > 1$), есть минимально возможная величина невязки согласно равенству (10.12). Если же спектр $F_D(y)$ заданной ДН полностью помещается в указанных пределах, то никаких дополнительных операций делать и не надо – мы имеем точное решение задачи синтеза и нулевую невязку. По сути, мы расширили тем самым применимость метода интеграла Фурье (МИФ) на случай приближенного синтеза и убедились в его эффективности и в такой постановке.

Казалось бы, все здесь ясно и делать больше нечего (разве что разбирать различные конкретные варианты, упражняясь в нахождении спектров тех или иных диаграммных функций). Но на самом деле, это только начало рассмотрения задачи приближенного синтеза, и потому самое интересное (и более сложное) – впереди.

3. Конечный интервал аппроксимации заданной ДН. Метод полиномиальной аппроксимации

Прежде чем переходить непосредственно к анализу задачи приближенного синтеза в новой постановке, остановимся на таком, на первый взгляд, очевидном вопросе: какой смысл имеет не конечный, а именно бесконечный интервал по переменной z (который мы рассмотрели ранее)? Действительно, из самого определения этой переменной хорошо видно, что гораздо более естественным выглядит выбор *конечного* интервала Z , причем того, который отвечает интервалу видимых углов θ , для которых выполняется $|\sin \theta| \leq 1$:

$$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad -z_0 \leq z = \pi \frac{L}{\lambda} \sin \theta \leq z_0, \quad z_0 = \pi \frac{L}{\lambda} \quad (11.1)$$

При сколь угодно больших, но заведомо ограниченных волновых размерах L/λ антенны, этот интервал является пусть протяженным, но принципиально конечным. Выбор меньшего интервала углов, например, более узкого углового сектора $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ приведет, очевидно, к еще большему ограничению интервала аппроксимации. Более того, совершенно ясно, что задавать диаграмму $D(z)$ за пределами интервала видимых углов просто бессмысленно из практических соображений. Зачем стремиться к получению ДН, которой отвечает частичное «исчезновение» мощности излучения в области углов, которые не видны при любом угловом положении точки наблюдения в дальней зоне, для которой мы и определили ДН как характеристику антенны?

Таким образом, вопрос о целесообразности уже рассмотренной постановки задачи приближенного синтеза для бесконечного интервала оказывается не столь очевидным, хотя акцентируем на нем свое внимание мы только сейчас, уже получив решение. Но, наверное, не зря мы это делаем хотя бы сейчас. Как можно догадаться, ответ связан не с заданной ДН, но со свойствами аппроксимирующей диаграммы $R(z)$ – с тем, что именно в ней могут возникнуть ненулевые значения за пределами интервала (11.1), а значит, может оказаться ненулевым и даже значительным вклад этих значений в интегральную величину невязки (10.7), если «собирать» ее на всем бесконечном интервале переменной z .

Для того, чтобы ясно понять физический смысл ненулевых значений ДН антенны за пределами интервала (11.1), вспомним материал лекции 3, когда мы рассматривали прямую задачу теории антенн и анализировали зоны излучения. Мы видели, как при удалении точки наблюдения от антенны происходит постепенное преобразование интегральной связи наблюдаемого поля с полем на самой антенне, которое в итоге завершилось получением выражений вида (5.7), (7.1), (8.1) в случае линейной антенны. При этом мы обратили внимание на то, что термин «ближняя зона» имеет два различных смысла. Первый из них – тот, который связан с разложением фаз полей элементарных сферических источников в ряд с выделением в них главного слагаемого (отвечающего сферическому источнику в центре антенны); второй – с рассеянием некоторой части подводимой к антенне мощности в непосредственной близости от нее, на расстояниях порядка нескольких длин волн, т.е. с реактивным полем антенны (см. рис. 3.3). Но мы не остановились тогда на вопросе о том, насколько важным здесь является вид функции АФР

антенны, и всегда ли мощность реактивного поля является малой величиной в сравнении с полной мощностью антенны (это было сделано умышленно, поскольку всему есть свое время). Так вот, сейчас пришло время разобраться с этим вопросом, поскольку он имеет самое прямое отношение к решению задачи синтеза антенн.

Оказывается, доля «потерянной» для дальней зоны мощности реактивного поля критически зависит от вида АФР и оказывается весьма значительной для тех антенн, которые имеют сильно осциллирующие вдоль апертуры распределения поля. Физически, это связано с сильным взаимодействием между собой тех близких участков апертуры, которые имеют сильно различные (тем более, полярные) значения поля. В результате такого взаимодействия полярно возбужденные участки апертуры «замыкаются» друг на друга (по сути в буквально м смысле, поскольку речь идет о замыкании силовых линий полей излучения этих отдельных участков), что и приводит к росту потерь подводимой к антенне мощности в непосредственной близости от нее и, соответственно, к значительному уменьшению доли активной мощности излучения. При этом не столь важно – об электромагнитных полях и источниках идет речь или об акустических, поскольку это универсальный эффект взаимодействия источников через излучаемые ими поля в ближнем поле. Когда АФР является плавной функцией координат, такое взаимодействие тоже есть, но является пренебрежимо малым, и практически вся мощность антенны эффективно передается в дальнюю зону, где ее угловое распределение полностью описывается ДН в области видимых углов $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Возвращаясь к основным характеристикам антенны, которые были определены в лекции 4, введем теперь еще одну характеристику, прямо связанную с понятием реактивного поля и отмеченным сейчас эффектом влияния АФР на его величину. Эта характеристика называется *добротностью* антенны и определяется она как отношение полной подводимой к антенне мощности P_{Σ} (суммы активной и реактивной мощностей) к основному (для практического использования) ее слагаемому – к активной мощности P_A . В наших обозначениях это определение имеет вид:

$$Q = \frac{P_{\Sigma}}{P_A} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |R(z)|^2 dz}{\int_{-z_0}^{+z_0} |R(z)|^2 dz} \quad (11.2)$$

Из этого определения видно, что тот позитивный смысл добротности, который интуитивно привычен нам по опыту знакомства с колебательными контурами, резонансными фильтрами и т.д., к антенной технике не имеет отношения. Напротив, чем выше добротность антенны, тем хуже она работает как источник излучения с точки зрения эффективной передачи подводимой мощности в дальнюю зону. При высокой добротности значительная часть мощности «остается» в ближней зоне и расходуется на взаимодействие составляющих антенну источников, но не на «освещение» окружающего антенну пространства. Другими словами, та мощность, которую мы можем «собрать» в дальней зоне (а фактически, уже в волновой зоне), интегрируя поле антенны по всем

возможным угловым положениям точки наблюдения, заведомо меньше полной мощности излучения, а та ДН, которая имеет физический смысл для интервала углов $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, не может описать все поле излучения антенны.

Не буквально, но весьма наглядно можно сопоставить работу высокодобротной антенны с работой двигателя автомобиля на нейтральной передаче, без передачи мощности на ведущие колеса при любом, даже большом, потреблении топлива. Понятно, что для включения в антенне «передачи» излучения в дальнюю зону необходимо позаботиться о том, чтобы ее АФР было достаточно плавной функцией, без резких и больших по амплитуде осцилляций.

Но как тогда учесть (описать) ту часть полной мощности, которая «не участвует» в формировании угловой зависимости поля излучения в дальней зоне? Формально, это проще всего сделать именно так, как мы, фактически, уже сделали – расширить область значений переменной z до бесконечной и тем самым включить в рассмотрение те углы, для которых $|\sin \theta| > 1$. Такие углы, по математическому определению, есть мнимые углы, которые трудно себе представить воочию, но они используются наравне с действительными (видимыми) углами, их тригонометрические функции хорошо известны и определяются через гиперболическими функции. Если такие «невидимые» углы рассматривать как аргументы ДН наравне с видимыми углами, то это и будет означать, что ДН понимается в широком смысле как угловая характеристика поля излучения с учетом реактивного поля, без ограничения (11.1) на интервал значений обобщенной угловой переменной z .

Таким образом, при анализе ДН антенны как функции обобщенной угловой переменной мы имеем два принципиально различных варианта разбиения бесконечной оси z : конечный интервал (11.1), отвечающий угловому распределению активного поля излучения в диапазоне видимых углов, и два полубесконечных интервала за его пределами:

$$-\infty < z < -z_0, \quad z_0 < z < \infty \quad (11.3)$$

которые отвечают угловому распределению реактивного поля излучения в области мнимых углов.

Теперь мы можем по-новому и более осмысленно взглянуть на уже использованные нами равенства Парсеваля (10.11). Действительно, если в левой части равенства стоит полная мощность антенны, которую мы «собираем» по всей ее апертуре, то справа обязан быть интеграл по всем возможным значениям переменной z , включая те, которые «отвечают» за реактивное поле антенны, т.е. интеграл в бесконечных пределах. То же в этом случае мы можем быть уверены в равенстве этих двух интегралов, трактуя его как равенство Парсеваля.

Как мы увидим в дальнейшем, решение задачи приближенного синтеза антенны при условии конечного интервала аппроксимации имеет принципиальную специфику, которая как раз и связана с возможностью получения высокодобротных решений для АФР, имеющих большие значения величины (11.2) – решений, имеющих низкую эффективность в смысле величины коэффициента передачи подводимой к антенне

мощности в дальнюю зону. Такой коэффициент естественно определить как обратную к добротности характеристику:

$$q = \frac{1}{Q} = \frac{\int_{-z_0}^{+z_0} |R(z)|^2 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} |R(z)|^2 dz} \quad (11.4)$$

Итак, уточнив физический и математический смыслы анализа ДН на различных интервалах ее переменной, перейдем теперь непосредственно к задаче приближенного синтеза при условии *конечного интервала* аппроксимации заданной ДН. Для определенности, будем рассматривать симметричный интервал (11.1) в качестве того интервала Z , для которого мы ставим задачу поиска приближенного решения. Такой выбор не означает, конечно, что нами не могут быть выбраны другие конечные интервалы, включая несимметричные относительно нуля. Главное, что это именно конечный интервал, в пределах которого мы определяем невязку диаграммных функций $R(z)$ и $D(z)$. По сути, нам нужно подобрать некую функцию $R(z)$ финитного спектра, которая достаточно хорошо аппроксимирует заданную функцию $D(z)$ на интервале (11.1), и даже настолько хорошо, чтобы обеспечить минимум невязки (10.5). Как это сделать?

Первое, что может прийти в голову – воспользоваться подходящей математической теоремой об аппроксимации непрерывной функции, определенной на отрезке своей вещественной переменной. Такая задача представляется вполне практичной по своей постановке, и нужная нам теорема действительно существует. Авторство ее принадлежит классическому математическому анализу – Карлу Вейерштрассу, имя которого хорошо известно студентам. Называют эту именную теорему по-разному – аппроксимационной теоремой, теоремой о равномерном приближении непрерывной функции многочленами – и нам она точно подходит. Действительно, заданная ДН заведомо относится к классу непрерывных функций без каких-либо «неприятностей» в виде разрывов и сингулярных значений (иначе мы бы не использовали ее в качестве желаемой ДН), а интервал (отрезок) аппроксимации – вещественный и конечный. Итак, что именно утверждает эта теорема, установленная в далеком 1885 году? В наших обозначениях, утверждение заключается в том, что если $D(z)$ – непрерывная функция, определенная на отрезке (11.1), то ее можно равномерно приблизить *на всем этом отрезке с любой, наперед заданной точностью*, полиномом $P_\kappa(z)$ соответствующего (пусть и достаточно высокого) порядка с вещественными коэффициентами (здесь κ – старшая степень полинома). Если вспомнить азбуку математического анализа, запись этой теоремы Вейерштрасса имеет вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\kappa(z) \Rightarrow |D(z) - P_\kappa(z)| \leq \varepsilon \text{ для } \forall z \in [-z_0, z_0]. \quad (11.5)$$

Другими словами, мы можем получить сколь угодно высокое качество аппроксимации заданной функции и именно на конечном интервале, подобрав соответствующий полином. Вопрос здесь только в необходимой для этого степени полинома и подборе его коэффициентов, но это уже «дело техники».

Но если аппроксимация может быть получена сколь угодно точной, то, очевидно, и невязка (10.5) может быть сделана сколь угодно малой согласно грубой оценке сверху:

$$J = \int_{-z_0}^{z_0} |D(z) - P_k(z)|^2 dz \leq (2z_0)\varepsilon^2$$

Таким образом, вопрос с аппроксимацией заданной диаграммы принципиально решен. Ясно, однако, что это еще не есть решение всей задачи, поскольку найденный полином $P_k(z)$ (11.5) не может быть прямо использован в качестве аппроксимирующей ДН $R(z)$ по той простой причине, что он «не прекращается» за пределами интервала и, более того, принимает бесконечно высокие (по модулю) значения в асимптотике $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, необходимо подобрать еще одну функцию в качестве множителя полинома, которая, с одной стороны, должна подавить его расходимость за пределами интервала, но при этом не должна испортить достигнутого качества аппроксимации в пределах интервала. Исходя из этих двух требований, мы понимаем, что такая функция $U_m(z)$ должна одновременно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} U_m(z) \Big|_{|z| \rightarrow \infty} &\rightarrow 0 (z^{-m}), \quad m > k \\ U_m(z) \Big|_{m \rightarrow \infty} &\rightarrow 1, \quad \text{при } |z| \leq z_0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

Индекс m в обозначении этой вспомогательной функции есть «управляющий» параметр, который регулирует степень ее приближения к единице (условие $U_m(z) \approx 1$) в пределах интервала и быстрое стремление к нулю (условие $U_m(z) \sim z^{-m}$) при больших z для того, чтобы компенсировать стремление к бесконечности самого полинома ($P_k(z) \sim z^k$). Из последнего ясно, что должно выполняться условие $m > k$.

Если такая функция нам будет известна, и, дополнительно, эта функция окажется функцией финитного спектра, то нам останется сделать недостающий шаг в определении аппроксимирующей ДН и получить ее в виде произведения:

$$R(z) = P_k(z)U_m(z) \quad (11.7)$$

Найденная таким образом ДН может быть далее использована для нахождения искомого АФР антенны с помощью одного из уже известных нам методов точного синтеза (см. лекцию 7).

Применяя МИФ, получаем АФР (индекс R в его обозначении опускаем за ненадобностью) в интегральном представлении:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(z)U_m(z)e^{iyz} dz. \quad (11.8a)$$

Применяя МПД, получаем представление для того же АФР в виде ряда Фурье (вопрос о конечных пределах суммирования будет уточнен чуть ниже):

$$F(y) = \sum_{n=-m}^m P_k(\pi n)U_m(\pi n)e^{i\pi ny}. \quad (11.8б)$$

Теперь остается определиться с функцией $U_m(z)$, обладающей свойствами (11.6), поскольку без нее вся эта стройная процедура не имеет практического смысла. Что же касается аппроксимирующего полинома, то его, очевидно, заранее определить невозможно, поскольку он определяется непосредственно заданной диаграммой, и его нахождение представляет собой отдельную вычислительную процедуру (в следующих лекциях мы увидим примеры такой полиномиальной аппроксимации).

Разумеется, нужная нам функция $U_m(z)$ «приготовлена» заранее и хорошо известна в теории синтеза антенн [2, 3]. Для нашего случая линейной антенны она выражается следующим образом:

$$U_m(z) = \frac{\sin z}{z \prod_{p=1}^m \left(1 - \left(\frac{z}{\pi p} \right)^2 \right)}, \quad (11.9)$$

где через $\prod_{p=1}^m$ обозначено произведение того набора степенных функций, которые приведены под этим знаком. Вид этой функции приведен на рис. 11.1 для двух сильно различных значений своего параметра: $m = 1, 30$. Для сравнения здесь же показана диаграммная функция $\sin z/z$, которая отвечает отсутствию многочленного произведения в знаменателе (11.9).

Не вдаваясь в детали, с которыми можно познакомиться в рекомендованных книгах [2, с.71], [3, с.145, 247], отметим главное: при больших значениях m эта функция имеет широкой и достаточно «плоский» в пределах заданного интервала главный лепесток, симметричный относительно нуля, и ряд очень быстро спадающих боковых лепестков за его пределами. Действительно, из рисунка хорошо видно, что с ростом m главный лепесток монотонно расширяется, в результате чего значения этой функции все меньше отличаются от нужного нам равенства единице в пределах интервала (11.1), а огибающая боковых лепестков степенным образом быстро стремится к нулю с ростом z как $z^{-(2m+1)}$, что обеспечивает нужное нам стремление к нулю ДН (11.7).

Первые нули этой функции достигаются симметрично в точках $z = \pm(m+1)\pi$, откуда следует, что для удовлетворения второго из условий (11.6) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$z_0 \ll (m+1)\pi \Rightarrow m \gg \frac{z_0}{\pi} = \frac{L}{\lambda}$$

Это неравенство дает оценку снизу для выбора индекса m , и из него хорошо видно, что чем больше волновой размер антенны, тем большие значения m требуются для выбора функции $U_m(z)$. В силу того, что все последующие нули этой функции расположены в симметричных эквидистантных точках $|z| = (m+n)\pi$, пределы суммирования ряда (11.8в) симметрично ограничены числом m .

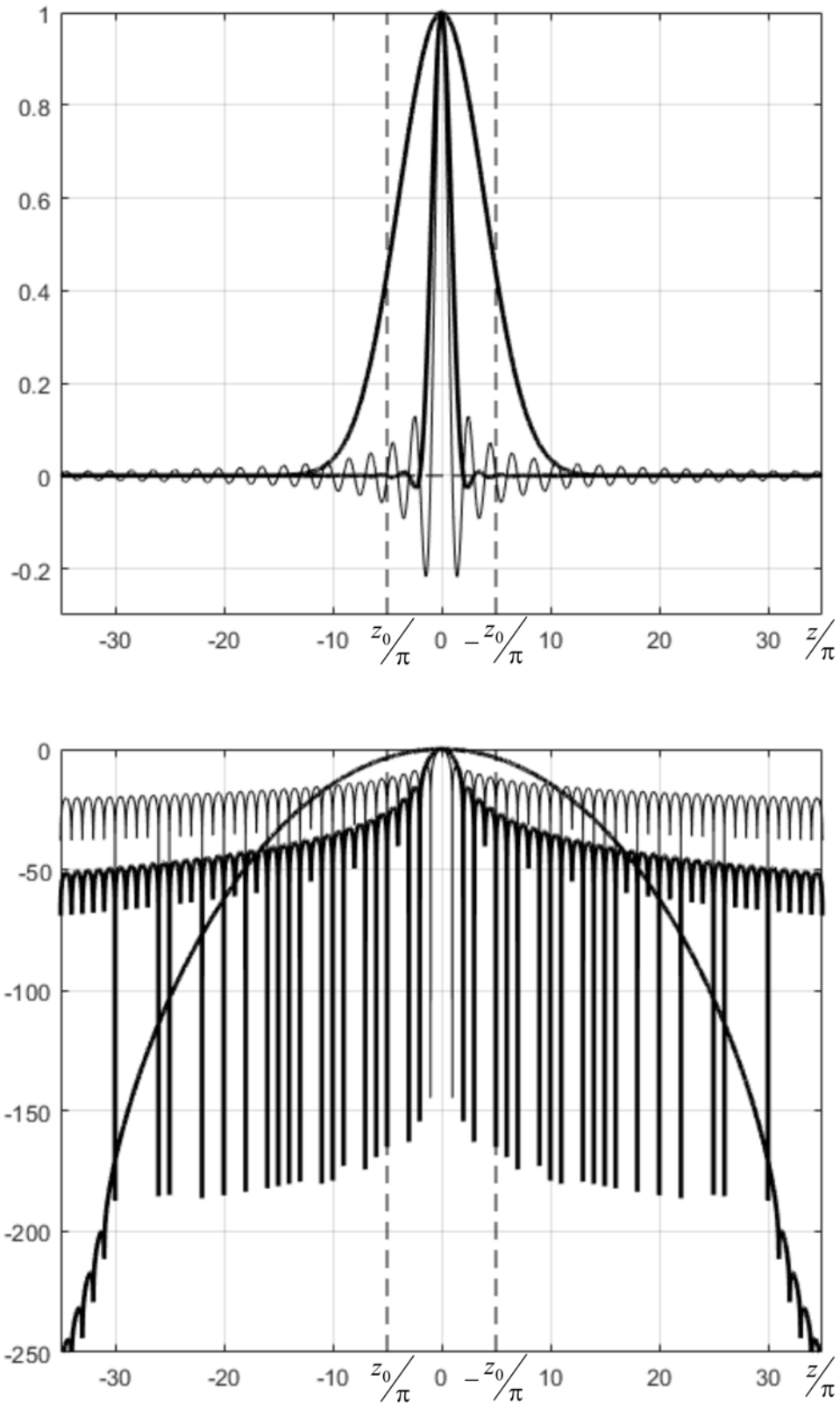


Рисунок 11.1. Функция $U_m(z)$ (11.9) в линейном (вверху) и логарифмическом (дБ, внизу) масштабах при значениях параметра $m = 1, 30$ (жирные кривые) и функция $\sin z/z$ (бледная кривая). Вертикальным пунктиром отмечен интервал аппроксимации

Таким образом, теперь мы можем сформулировать всю процедуру приближенного синтеза антенны на основе полиномиальной аппроксимации заданной ДН по шагам:

- 1) сделать преобразование (7.2) угловой переменной и получить заданную ДН $D(\vartheta)$ в виде функции $D(z)$;
- 2) подобрать вспомогательную функцию $U_m(z)$ (11.9), определившись с выбором величины $m \gg L/\lambda$;
- 3) построить функцию $D(z)/U_m(z)$ на интервале (11.1);
- 4) аппроксимировать полученную функцию с наперед заданной точностью с помощью полинома $P_\kappa(z)$ достаточно высокой, но ограниченной степени, удовлетворяющей условию $\kappa < 2m$; при необходимости – увеличить величину m и степень полинома для достижения более высокой точности аппроксимации;
- 5) рассчитать полученную в результате аппроксимации невязку (8.5);
- 6) рассчитать АФР $F(y)$ согласно (11.8).

Поскольку полученное нами решение опирается на строгую теорему математического анализа, то сомневаться в его корректности не приходится. С математической точки зрения, предложенный метод приближенного синтеза антенны выглядит безупречно. Но с физической точки зрения, если задуматься глубже, может возникнуть определенное замешательство и даже сомнение в его применимости.

Действительно, какой качественный вывод мы можем сделать в итоге? Мы показали, фактически, что для *любой* заданной ДН (без каких-либо оговорок относительно свойств ее спектра) мы можем синтезировать антенну *конечного* волнового размера, т.е. получить для нее АФР и отвечающую ему ДН *финитного* спектра, которая *сколь угодно точно* приближена к заданной ДН. Но если заданная ДН не является функцией финитного спектра, или ее спектр финитный, но сильно выходит за пределы отрезка $|y| \leq 1$, то как это может быть? По аналогии с обработкой сигналов, мы, как будто, имеем теперь способ получить сколь угодно хорошее воспроизведение некоторого произвольного сигнала, в том числе, сигнала с бесконечно широким спектром, с помощью сигнала с заведомо ограниченным спектром. Разве это возможно?

На следующей лекции мы постараемся разрешить этот, на первый взгляд, неразрешимый парадокс и прояснить те принципиальные физические аспекты (по сути – ограничения), которые мы пока не затронули, но они характерны для данной задачи и потому их необходимо привлечь в решению задачи синтеза наравне с математическими процедурами.

Лекция 12. Приближенные методы синтеза линейной антенны (продолжение)

Предыдущую лекцию мы завершили выводом, который может показаться парадоксальным. Опираясь на строгую математическую теорему, мы показали, что, несмотря на отсутствие заранее выставленного требования к ДН относительно ее спектральных свойств и необходимого условия существования точного решения (см. лекции 7,8), оказывается возможным получить пусть приближенное, но с любой и наперед заданной точностью близкое к точному, решение задачи синтеза антенны, которое удовлетворяет этому условию, поскольку оно реализуется на антенне заведомо конечного волнового размера. Другими словами, мы получили возможность получить почти точное решение даже при условии, что точное решение поставленной задачи не существует в принципе. Но, казалось бы, этого быть не может в принципе? Приведенная аналогия с воспроизведением широкополосного сигнала (даже с неограниченным по ширине спектром) с помощью относительно узкополосного сигнала подчеркивает общность поставленного вопроса, имеющего отношение не только к задаче синтеза антенн, но к широкому кругу задач радиофизики и радиотехники.

Теперь нам предстоит разобраться с этим «подозрительным» выводом и уточнить принципиально важную особенность той процедуры приближенного синтеза антенны, которая была развита на предыдущей лекции.

Качественное соображение, до которого можно и полезно догадаться еще до того, как обратиться к формулам, заключается в следующем. Требуя от ДН $R(z)$ высокого качества приближения к заданной ДН $D(z)$ в пределах конечного интервала обобщенной угловой переменной z – именно, того интервала (11.1), для которого мы поставили задачу приближенного синтеза антенны и задали диаграмму – мы явно упускаем из виду поведение $R(z)$, а вместе с ним, и величину невязки, за пределами этого интервала. С поведением заданной диаграммы вопросов нет – она равна нулю везде за пределами интервала по самой постановке задачи, так мы ее сами определили. Но относительно аппроксимирующей диаграммы мы такого однозначного заключения сделать не можем, поскольку не контролируем ее значения за этими пределами, стремясь к минимизации невязки только внутри интервала. Именно в этом и заключается принципиальное отличие данной постановки задачи приближенного синтеза от аналогичной постановки для бесконечного интервала (см. лекцию 9). В обоих случаях исходная ДН задается на конечном интервале, но в первом случае мы минимизируем «полную» невязку, учитывая все возможные значения полученной диаграммы при любых значениях переменной z , включая бесконечные, а во втором (как сейчас) – речь идет о невязке в пределах ограниченного интервала, и только о ней. Поскольку, как мы уже знаем, ненулевые значения $R(z)$ в «запредельных» отрезках (11.3) переменной z отвечают реактивной мощности антенны, то рост таких значений неизбежно приводит к росту реактивной мощности и добротности антенны (11.2), а вместе с ними – к уменьшению доли активной мощности, излучаемой антенной в дальнюю зону (к уменьшению величины отношения (11.4)).

Таким образом, разработав на прошлой лекции строгую математическую процедуру и доказав возможность достижения предельно малых значений невязки (10.5) на конечном интервале (11.1), мы должны теперь внимательнее отнестись к свойствам полученного решения на всем бесконечном интервале и оценить их возможные следствия. Становится понятно, что эти свойства должны играть роль тех ограничений, которые препятствуют «погоне» за минимизацией невязки в ситуациях, когда спектр заданной ДН оказывается заметно шире отрезка $|y| < 1$, определяемого длиной нашей антенны (тем более, если он вообще не имеет конечных пределов по переменной y).

Чтобы прояснить все эти важные аспекты, рассмотрим модельную задачу приближенного синтеза в постановке, показанной качественно на рис. 12.1. Зададим ДН $D_a(z)$ в виде симметричной трапеции, которая целиком уместится в интервале (11.1), отвечающем диапазону видимых углов. Параметр такой ДН – величина a , уменьшение которой приводит к монотонному сужению ДН и повышению направленности антенны. Ясно, что при самых малых значениях $a \rightarrow 0$, такая ДН отвечает бесконечно высокой направленности антенны, и при этом неограниченно растут значения модуля ее производной. Это очевидно, поскольку максимальная величина производной определяется крутизной склонов трапеции (на других участках производная строго нулевая), а те становятся все ближе к вертикальным по мере «сжатия» диаграммной трапеции вокруг нулевого угла. Можно сказать, что такая диаграмма была бы идеальной для практического использования – в ней совсем нет боковых лепестков, а единственный регулирующий параметр позволяет обеспечить сколь угодно высокую направленность антенны.

Располагая уже известным нам методом приближенного синтеза антенны на основе полиномиальной аппроксимации заданной диаграммы (см. лекцию 11), что мы можем сказать относительно реализации такой ДН с помощью антенны заданного размера, т.е. получения близкой к ней ДН $R_a(z)$ и реализующего ее АФР $F_a(y)$? Как ни странно на первый взгляд, можем сказать довольно многое и, по сути, главное, даже не касаясь «технических» вопросов выбора вспомогательной функции (11.9) и нахождения полинома соответствующей степени (очевидно, весьма высокой при малых значениях параметра a).

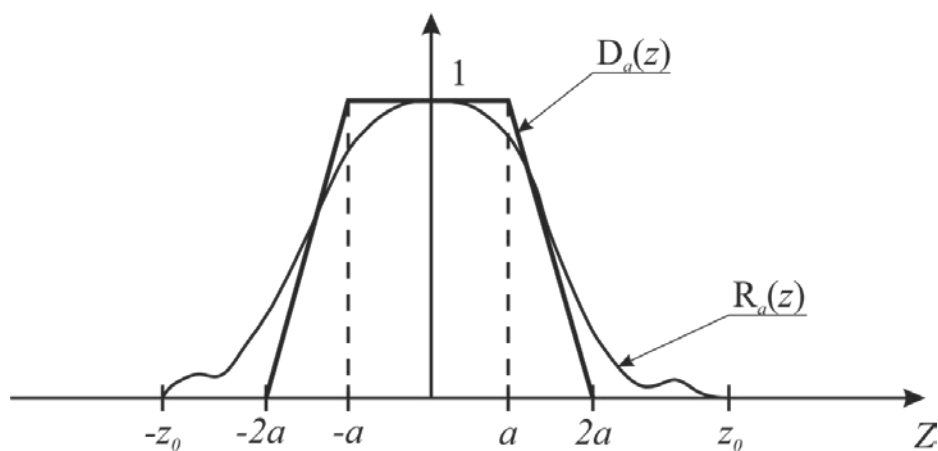


Рисунок 12.1. Заданная ДН $D_a(z)$ и аппроксимирующая ДН $R_a(z)$ в пределах конечного интервала $|z| \leq z_0$ (качественный рисунок, по материалам [3])

Итак, будем считать, что мы успешно применили разработанный метод и подобрали аппроксимирующую ДН $R_a(z)$ с помощью (11.7). Качественно, она изображена на этом же рисунке как более плавная диаграмма, в сравнении с заданной ДН, но не слишком сильно от нее отличающаяся в пределах интервала $|z| \leq z_0$. Теперь, если мы будем постепенно уменьшать параметр a , подбирая каждый раз новую ДН $R_a(z)$, то в этих диаграммах, вслед за ДН $D_a(z)$, будет монотонно сужаться главный лепесток и при этом оставаться малыми боковые лепестки (иначе будет быстро расти величина невязки, которую мы удерживаем на низких значениях). Следовательно, вся «видимая» (активная) мощность антенны будет постепенно концентрироваться в очень узком секторе углов вокруг нулевого угла, и мы действительно получим, как будто, идеальную антенну. Но что при этом происходит с ДН $R_a(z)$ за пределами интервала, т.е. каковы ее свойства на всей оси угловой переменной?

Из теории функций известно следующее неравенство, справедливое для произвольных функций того класса, к которым относятся функции финитного спектра, т.е. для ДН $R_a(z)$:

$$\max_{|z| < \infty} |R'_a(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |R_a(z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12.1)$$

Это неравенство достаточно легко доказывается (студенты могут проделать это самостоятельно). Для этого следует воспользоваться уравнением (10.1), получить из него выражение для производной $R'_a(z)$ (дифференцировать интеграл (10.1) по z как по параметру), затем получить оценку сверху для ее модуля на основе известного интегрального неравенства Коши—Буняковского и воспользоваться равенством Парсеваля (первым из равенств (10.11)) для получения в правой части оценки «энергетического» интеграла от квадрата модуля $|R_a(z)|^2$. С учетом того, что ДН $R_a(z)$ достаточно хорошо аппроксимирует ДН $D_a(z)$ на всем интервале $|z| \leq z_0$, а та имеет ограниченные значения $D_a(z) \leq 1$, мы можем легко сделать самую грубую оценку сверху для активной мощности (полагая, что везде на этом интервале мощность $|R_a(z)|^2 = 1$, что является очень сильным огрублением ее реального поведения):

$$\int_{-z_0}^{+z_0} |R_a(z)|^2 dz \leq 2z_0 = 2\pi \frac{L}{\lambda} \quad (12.2)$$

Конечно, величина активной мощности намного меньше, что хорошо видно из рис. 12.1, но нам сейчас важна не точность этой оценки, а только тот факт, что величина в левой части (12.2) заведомо конечная.

В то же время, как мы уже заметили выше, вместе с уменьшением ширины заданной ДН (параметра a) монотонно растет модуль ее производной, а вслед за ним – модуль производной аппроксимирующей ДН. Из неравенства (12.1) видно, что его максимальное значение «подпирает» снизу величину полной мощности, подводимой к антенне (она под корнем в правой части). Следовательно, полная мощность антенны также монотонно и неограниченно растет с уменьшением ширины ДН. Но поскольку слагаемое (12.2), отвечающее активной мощности, остается конечным вне зависимости от параметра a (и только уменьшается с его уменьшением, если оценивать интеграл (12.2) более точно), мы приходим к важному качественному выводу: с обострением ДН монотонно растет реактивная мощность, и именно ее рост обеспечивает рост полной мощности при малых значениях параметра a , в то время как относительная доля активной мощности пропорционально уменьшается.

Таким образом, мы получаем в асимптотике бесконечно малой ширины заданной ДН следующее асимптотическое свойство аппроксимирующей ее диаграммы $R_a(z)$:

$$q_a = \frac{\int_{-z_0}^{+z_0} |R_a(z)|^2 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} |R_a(z)|^2 dz} \Bigg|_{a \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (12.3)$$

Двигаемся далее. Согласно еще одному известному неравенству с участием модуля производной (неравенству Берштейна), имеем следующую оценку снизу для максимальных значений (по модулю) самой диаграммы $R_a(z)$:

$$\max_{|z| < \infty} |R'_a(z)| \leq \max_{|z| < \infty} |R_a(z)|. \quad (12.4)$$

Это неравенство приводится здесь без доказательства, но смысл его кажется вполне ясным. Действительно, только благодаря неограниченному росту значений $|R_a(z)|$ хотя бы в некоторых точках (пусть даже в одной точке), но явно за пределами интервала (11.1), может получиться неравенство (12.1). Можно сказать, что эти два неравенства взаимосвязаны, и оба они указывают на одно и то же: с уменьшением ширины заданной ДН аппроксимирующая ее диаграмма, с одной стороны, продолжает оставаться достаточно близкой к заданной (невязка удерживается малой), но с другой – ее отдельные значения *за пределами* интервала монотонно и неограниченно растут. Следовательно, мы можем заключить, хотя и на качественном уровне, что строго выполняется условие:

$$\max_{|z| \leq z_0} |R_a(z)| \approx 1 \ll \max_{|z| > z_0} |R_a(z)|. \quad (12.5)$$

Представленные здесь рассуждения и оценки позволяют продолжить рис. 12.1 на том же качественном уровне, но уже с учетом точно установленных свойств аппроксимирующей диаграммы при малых значениях параметра a . Правый рисунок, отвечающий такой асимптотике, иллюстрирует установленный нами вывод, что

аппроксимирующая ДН $R_a(z)$ достигает максимальных (и очень больших) значений за пределами интервала видимых углов, но никак не внутри его. Напротив, при «умеренной» ширине заданной ДН, когда значения модуля производной еще не слишком велики, в смысле неравенства (12.4), аппроксимирующая ДН в основном локализована в пределах этого интервала и точно не имеет больших значений за его пределами (левый рисунок).

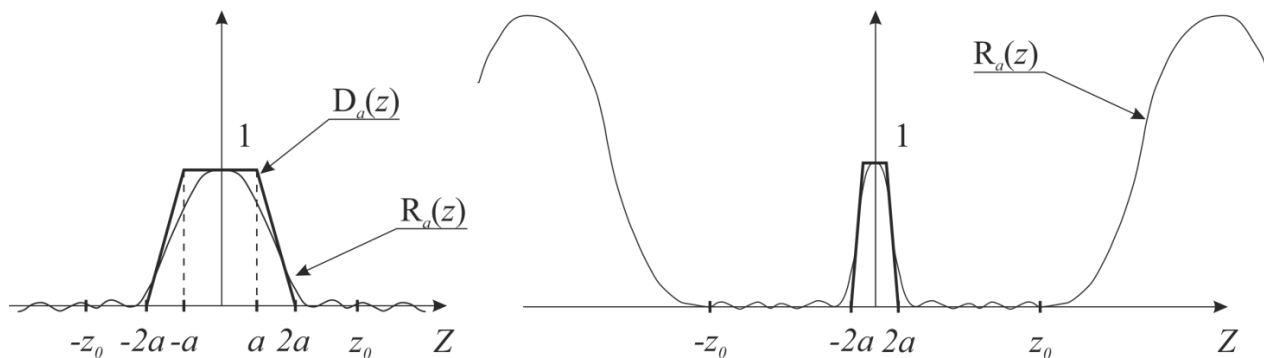


Рисунок 12.2. Заданная ДН $D_a(z)$ и аппроксимирующая ДН $R_a(z)$ на бесконечной оси переменной при «умеренной» (слева) и малой (справа) угловой ширине заданной ДН (качественный рисунок)

Установив эти качественные свойства аппроксимирующей ДН, мы можем теперь сделать важный вывод относительно свойств АФР, получение которого и есть конечная цель решения задачи синтеза антенны.

Действительно, согласно МПД, мы имеем уже известное нам разложение искомого АФР в ряд Фурье по парциальным АФР (см. лекцию 7, выражение (7.10):

$$F_a(y) = \begin{cases} \sum_n R_a(\pi n) e^{i\pi n y}, & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases} \quad (12.6)$$

Привлекая неравенство (12.5), мы заключаем, что амплитуды младших (по номерам) гармоник этого ряда (отсчеты ДН с номерами $n \leq z_0/\pi = L/\lambda$) много меньше некоторых из амплитуд старших гармоник (отсчетов ДН с номерами $n > L/\lambda$). Но отсюда прямо следует, что в АФР (12.6) определяющий вклад вносят именно высокие гармоники, следовательно, функция АФР является сильно осциллирующей: периоды ее осцилляций много меньше размера антенны, а отдельные значения неизбежно оказываются очень большими (даже неограниченно большими в асимптотике $a \rightarrow 0$).

Таким образом, мы приходим к уже знакомому нам утверждению, но теперь строго доказанному: антенна с высокими значениями реактивной мощности имеет сильно осциллирующее распределение поля на апертуре, и наоборот – сильные осцилляции поля на антенне приводят к преобладанию доли реактивной мощности в полной мощности антенны и, соответственно, к высокой добротности и малой доли активной мощности.

Итак, мы показали, хотя и качественно, но корректно и точно, что стремление получить в конечном интервале видимых углов хорошее приближение к диаграмме, далекой от выполнения необходимого условия существования точного решения, приводит к следующим свойствам получаемого при этом решения задачи:

- 1) малые значения коэффициента (12.3) передачи мощности излучения в дальнюю зону и преобладающая доля реактивной мощности;
- 2) резкие (с малым периодом по антенне) и значительные (по величине) осцилляции АФР (12.6).

И есть еще одно важное свойство, которое сообщается без доказательства, но интуитивно кажется понятным в силу свойства 2), а именно:

- 3) неустойчивость полученного решения, т.е. высокая чувствительность синтезированного АФР (12.6) к малым изменениям заданной ДН и высокая чувствительность полученной ДН $R_a(z)$ к малым ошибкам воспроизведения АФР на апертуре антенны.

Подчеркнем, что первые два свойства являются сугубо «антенными», поскольку касаются нашей постановки задачи синтеза антенны как обратной задачи теории антенн. Но что касается свойства 3), то оно тоже сформулировано как «антенное», но отражает совершенно общее свойство решений всех без исключения обратных задач – при определенных условиях решения обратной задачи обладают низкой устойчивостью к малым вариациям тех распределений (сигнальных функций, набора данных, т.п.), которые задаются при ее постановке. Задача синтеза (реконструкции) некоторой линейной системы по заданным распределениям получаемых от нее «сигналов» (в обобщенном смысле) всегда сопряжена с подобными свойствами решения, что необходимо учитывать при решении таких задач в конкретных постановках. Это общее свойство обратных задач есть следствие того, что такие задачи являются некорректными по своей постановке (некорректность задачи понимается здесь в математическом смысле и означает возможность принципиального отсутствия точного решения), что не исключает, конечно, возможность получения приближенного решения и при этом с малой невязкой.

Лекция 13. Сверхнаправленные антенны

На прошлой лекции мы установили основные свойства решений задачи приближенного синтеза антенны в тех случаях, когда заданная ДН не относится к классу реализуемых точно (не обладает финитным спектром), но мы, несмотря на это, стремимся получить как можно более высокое качество ее аппроксимации и синтезировать антенну, обладающую почти такой же диаграммой. Установленные нами свойства 1) – 3) синтезированной при этом антенны связаны, как мы видели, с угловой шириной заданной ДН – когда она становится малой, т.е. обладает «слишком» высокой направленностью, то эти свойства оказываются в буквальном смысле «расплатой» за наше стремление такую направленность получить с помощью антенны ограниченного волнового размера.

В отмеченном контексте такие решения задачи синтеза и сами антенны получили определение *сверхнаправленных*. Приставка *сверх-* прямо указывает на то, что

направленность такой антенны является слишком высокой для ее ограниченной длины, и потому стремление получить узкий главный лепесток ДН оборачивается подобными негативными свойствами. Другими словами, основная «цена вопроса» в получении слишком «острой» ДН заключается не в поиске подходящей аппроксимирующей функции (например, полинома), но прежде всего – в потере значительной доли подводимой к антенне мощности в ближней зоне и сложном характере получаемого АФР, которое практически трудно реализовать и затем использовать.

Подчеркнем, вместе с тем, что негативные свойства сверхнаправленного решения задачи синтеза могут возникнуть не только при попытке получения высокой направленности антенны при относительно малых ее волновых размерах. Мы видели, что не сама ширина главного лепестка ДН играет здесь определяющую роль, но значения производной заданной ДН в отдельных точках (угловых координатах). Управление значением производной «через» ширину главного лепестка и высокую направленность – наглядный и практически наиболее интересный случай, но он не исключает и другие варианты, когда направленность антенны реально оказывается низкой, но свойства 1) – 3) при этом выполняются. Это означает, что «сверхнаправленной» может оказаться антенна и с весьма низкой направленностью. Тем не менее, термины «сверхнаправленность» (как явление) и «сверхнаправленные антенны» (как решение задачи синтеза) являются общепринятыми и несут в себе важную смысловую нагрузку.

Разберем более подробно свойства сверхнаправленных решений на двух численных примерах, наглядно иллюстрирующих все сказанное выше.

Первый пример [2, с.159] показан на рис. 13.1 и касается синтеза антенны по некоторой заданной ДН (выражение для нее можно увидеть по приведенной ссылке, нам оно не столь важно). Параметром, «управляющим» переходом антенны из обычного в сверхнаправленный режим, является здесь волновой размер антенны $b = L/\lambda$. Рисунки для ДН (слева) и отвечающего ей амплитудного распределения антенны (справа) приведены только для положительных значений своих аргументов (поскольку они симметричные) и таким образом, что параметр b монотонно уменьшается: $b = 8, 5, 4$. Для ДН здесь используется переменная z/π , поэтому интервал (11.1) видимых углов ограничен в значением параметра b .

Видно, что обычный режим излучения (верхняя пара рисунков) не сопровождается отмеченными выше негативными свойствами в виде высоких значений ДН за пределами диапазона видимых углов и сильных осцилляций поля на антенне. Однако, при уменьшении размера антенны попытка реализовать ту же самую ДН неизбежно приводит к переходу антенны в сверхнаправленный режим со всеми вытекающими отсюда негативными следствиями в виде быстрого роста максимальных значений ДН за пределами области видимых углов и сильной «раскачки» поля на антенне. Соответствующие значения полной мощности антенны для этих трех рисунков следующие (в безразмерных величинах): $P_{\Sigma} = 1, 3, 3 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^8$, т.е. они стремительно растут сразу на несколько порядков величины. При этом хорошо видно, почему они растут – за счет роста реактивной мощности, отвечающей значениям ДН за пределами интервала видимых углов. Если обратить внимание на приведенные значения по

вертикальным осям, то станет еще более ясно, насколько значительными оказываются отмеченные нами эффекты: отличия также составляют несколько порядков соответствующих величин, и это при том, что волновой размер антенны изменился только в пределах двух раз.

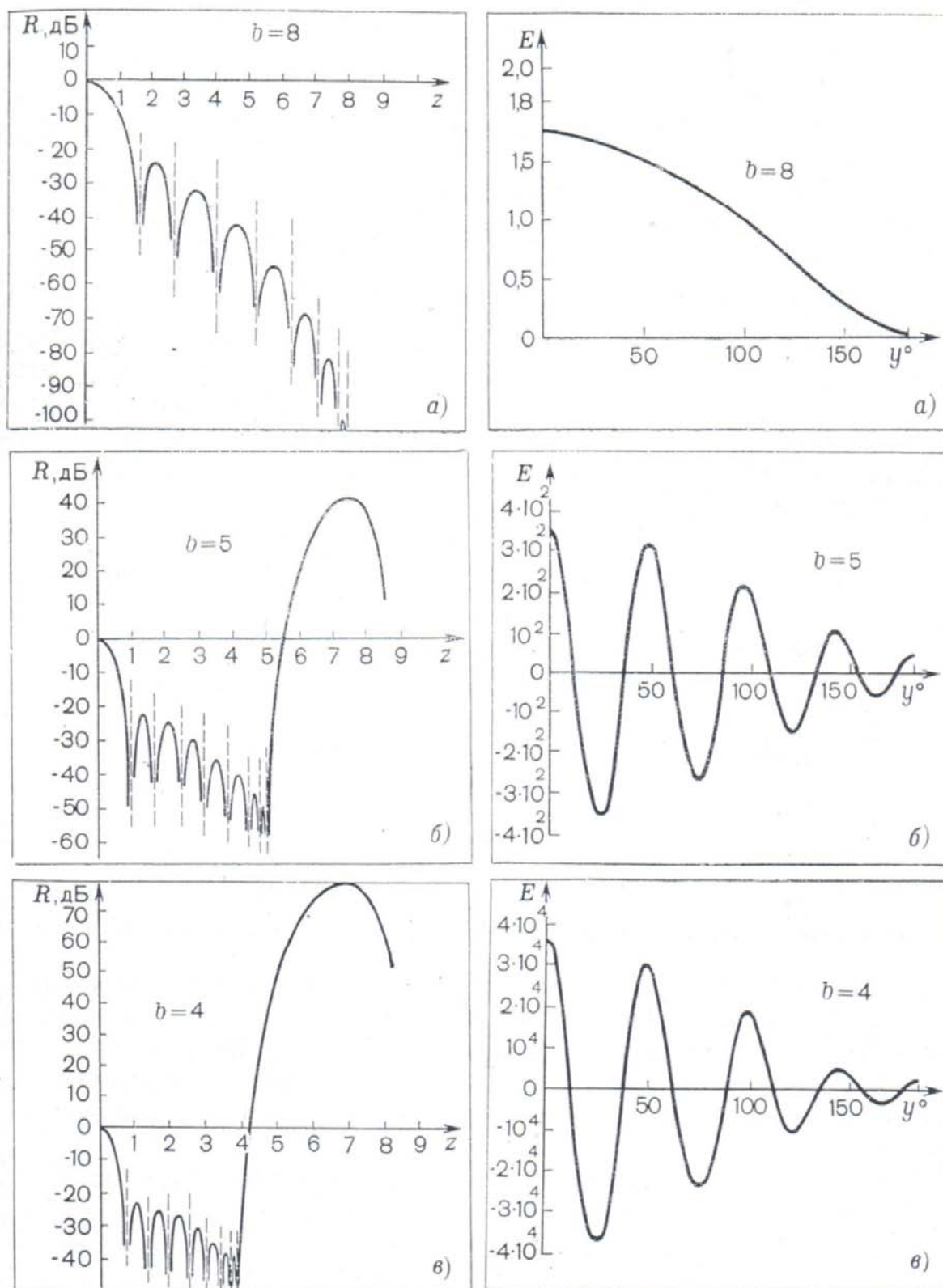


Рисунок 13.1. ДН (слева) и АР (справа) антенны при трех значениях ее волнового размера $b = 8, 5, 4$ (сверху вниз) для заданной ДН, изображенной на верхнем левом рисунке [2]

Второй пример [2, с.75] иллюстрирует сверхнаправленный режим излучения в том случае, когда заданная ДН реально далека от того, чтобы считаться направленной. Эта диаграмма как функция угла имеет вид: $D(\vartheta) = \cos \vartheta$. Очевидно, направленность такой ДН очень низкая – ширина единственного «лепестка» (фактически, полной диаграммы) составляет величину $(\Delta \vartheta)_{0,7} \approx 90^\circ$. Однако, и в этом случае реализация такой слабонаправленной ДН сопровождается теми же качественными эффектами 1) – 3), которые характерны для сверхнаправленных антенн.

Задание студентам:

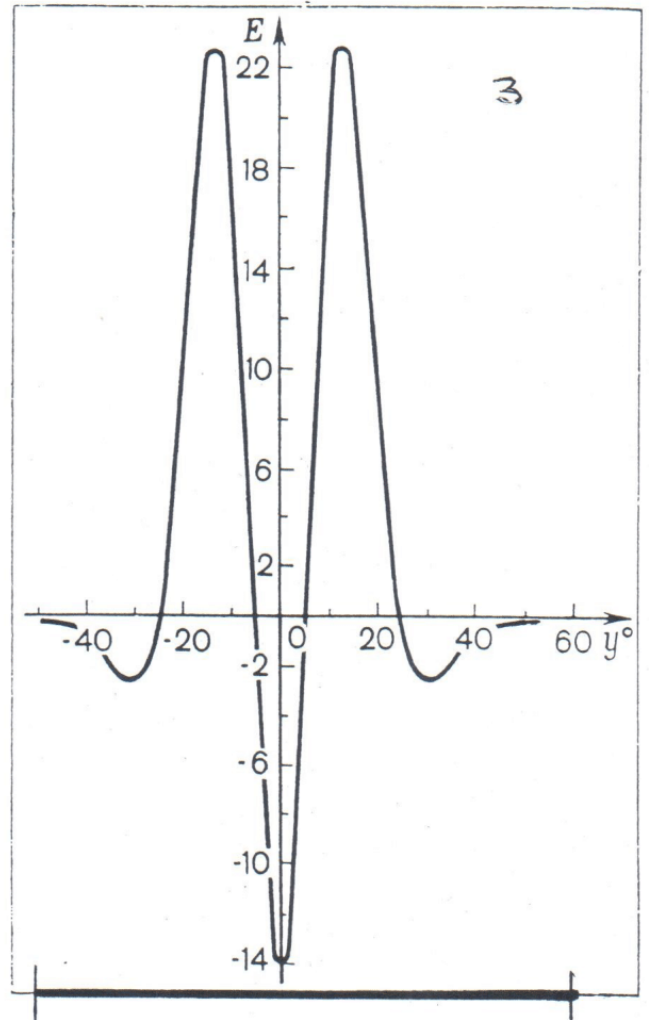
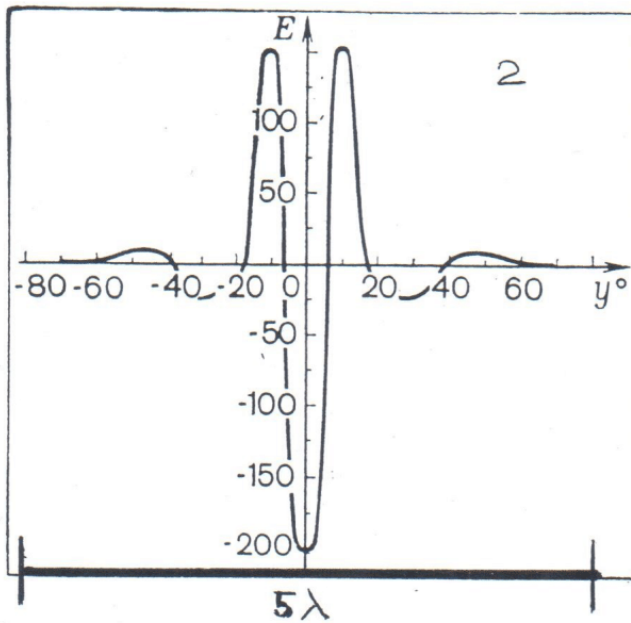
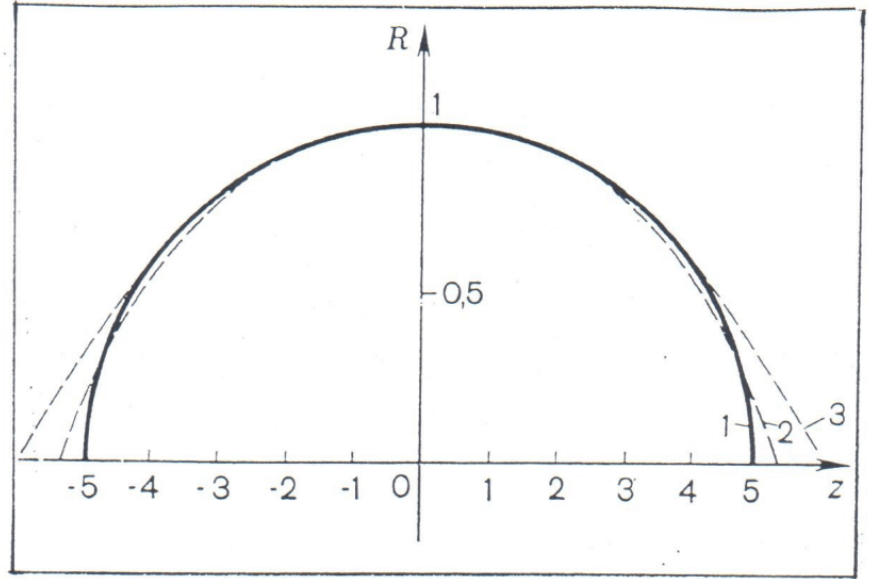
доказать, что рассмотренная в данном примере ДН действительно относится к классу сверхнаправленных диаграмм для антенны любого конечного волнового размера.

На рис. 13.2 этот пример показан для антенны с относительно небольшим волновым размером $L/\lambda = 5$. На верхнем графике показаны заданная ДН как функция той же переменной z/π (сплошная кривая, номер 1) и две аппроксимирующие диаграммы, отвечающие полиномам шестого порядка (пунктир, номер 2) и четвертого порядка (пунктир, номер 3). Выражения для самих полиномов можно уточнить по указанной ссылке, они содержат только четные степени переменной (в силу симметрии относительно нуля). В целом, заданная диаграммная функция довольно плавная и поэтому хорошо (на большей части интервала) аппроксимируется даже простыми полиномами невысокого порядка. Вспомогательная функция (11.9) в обоих случаях выбрана для значения $m = 64$, т.е. условие на соотношение степени полинома и этого параметра (см. лекцию 11) выполняется здесь с большим запасом. Очевидно, что второй случай обеспечивает лучшую аппроксимацию за счет использования более сложного полинома, но из графика хорошо видно, что это улучшение не столь значительное и касается только самых «краев» ДН. На нижних двух графиках показаны результаты решения задачи приближенного синтеза – полученные АФР, которые в данном случае также имеют только амплитудные распределения (антенна является синфазной).

Хорошо видно, что и в этом примере распределение поля на антенне имеет ярко выраженный осциллирующий характер, причем переход от случая 3 (справа) к случаю 2 (слева), которое сопровождается только незначительным улучшением качества аппроксимации, приводит к резкому росту величины этих осцилляций (на порядок). Видно также, что характерный пространственный масштаб, на котором происходит такие быстрые изменения АР со сменой знака, много меньше размера антенны и составляет всего $\sim \lambda$, что, естественно, трудно практически реализовать с требуемой точностью. Важно, что даже небольшие отличия от полученного решения (ошибки в реализации синтезированного АФР), как было отмечено выше, приводят к быстрому росту невязки – в этом и заключается неустойчивость сверхнаправленного решения задачи синтеза.

Таким образом, по свойствам синтезированного АФР рассмотренный здесь пример слабонаправленной антенны качественно аналогичен приведенному выше примеру, где термин «сверхнаправленность» имеет буквальный смысл.

4.1. Диаграмма направленности типа $\cos \vartheta$



4.2. Распределение тока, необходимое для получения диаграммы направленности, изображенной на рис. 4.1 (кривая 2)

4.3. Распределение тока, необходимое для получения диаграммы направленности, изображенной на рис. 4.1 (кривая 3)

Рисунок 13.2. ДН (вверху справа) и АР (внизу слева и справа) антенны для заданной ДН в виде $D(\vartheta) = \cos \vartheta$ (сплошная кривая – 1) для двух разных вариантов полиномиальной аппроксимации (пунктирные кривые – 2,3) [2]

Подведем промежуточный итог последних двух лекций, насыщенных важными выводами, и наметим план дальнейшего продвижения.

Итак, мы поняли, что сверхнаправленность может быть охарактеризована как явление, типичное и даже неизбежное для антенн относительно малых волновых размеров, когда ставится задача получения с их помощью высокой направленности, при этом определения «относительно малых» и «высокой» явно взаимосвязаны. Принципиальных математических ограничений здесь не возникает – задача формально решается, метод получения приближенного решения на основе строгой теоремы известен, с примерами его применения мы познакомились. Возможно, есть еще подобные методы, но нам достаточно и одного, чтобы понять, что здесь не все «так просто». Мы видим, что есть серьезные ограничения в применимости строгих математических процедур, но возникают они с другой стороны – со стороны физического смысла и ограничений возможности практической реализации полученных решений. Сверхнаправленные антенны оказываются мало эффективными по величине активной мощности излучения и трудно реализуемыми из-за очень сложного характера поля на апертуре, неустойчивого к малым вариациям заданной ДН. Полученная ДН, в свою очередь, оказывается неустойчивой к малым ошибкам реализации АФР сложной формы на апертуре. Все это говорит о том, что сверхнаправленные решения задачи синтеза теоретически возможны, но практически не реализуемы (точнее, реализуемы, но ценой больших потерь мощности и очень высоких требований к техническому исполнению).

В этом, собственно, и заключается разрешение того парадокса, которым мы завершили лекцию 11. По существу, никакого парадокса и не было, но теперь есть более глубокое понимание принципиальных особенностей задачи синтеза антенны как типичного примера обратных задач радиофизики.

Таким образом, необходима существенная коррекция той процедуры, которую мы получили в лекции 11, опираясь на теорему Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации. И уже понятно, на что должна быть направлена такая коррекция прежде всего – на введение в процедуру синтеза дополнительного ограничения сверху на величину полной излучаемой мощности антенны. Тогда синтезированное АФР заведомо окажется более плавным и гораздо более устойчивым к вариациям заданной ДН, а сама ДН – более устойчивой к ошибкам (неточностям) в реализации «своего» АФР на апертуре, хотя и не столь близкой, возможно, к заданной ДН. Если же такая коррекция с ограничением излучаемой мощности не используется, то с уменьшением волнового размера антенны решение для АФР неизбежно оказывается сверхнаправленным и практически нереализуемым с учетом всей совокупности выявленных нами негативных свойств таких решений. Другими словами, нам необходим разумный компромисс между точностью аппроксимации заданной ДН и контролируемой величиной полной, а вместе с ней, и реактивной мощности антенны. Естественно, все это важно и требуется только в том случае, если заданная ДН оказывается слишком далекой от выполнения необходимого условия существования точного решения при заданном волновом размере антенны, т.е. если заданная ДН сама является сверхнаправленной и «заставляет» быть таковым искомым решением задачи синтеза антенны.

Подобная «компромиссная» коррекция метода решения обратной задачи есть не что иное, как *регуляризация* неустойчивого решения обратной задачи, которая также, как и сама неустойчивость, является общим местом анализа обратных задач. Теория антенн здесь является одним из практически важных примеров, но далеко не единственным.

Лекция 14. Регуляризация сверхнаправленных решений задачи синтеза

Предыдущую лекцию мы завершили полным пониманием того, что нам необходимо подумать о существенной коррекции развитой процедуры приближенного синтеза антенны и изменить ее таким образом, чтобы у нас появилась возможность контролировать величину полной мощности антенны, а вместе с ней, и «паразитной» реактивной мощности. Если получится это сделать, то синтезированное АФР антенны гарантированно окажется гораздо более приемлемым для своей реализации, поскольку не будет обладать теми неприятными свойствами, которые взаимосвязаны с ростом реактивной мощности – в нем не будет сильных и опасных (с малым пространственным масштабом) осцилляций, оно будет достаточно устойчивым.

Следуя общепринятой терминологии обратных задач, речь идет о *регуляризации* решения. Применительно к нашей обратной задаче синтеза антенны, этот термин кажется совершенно понятным и даже наглядным – действительно, нам нужна именно регуляризация (фактически, сглаживание) тех «скачкообразных» АФР, которые характерны для сверхнаправленной антенны (наглядные примеры были приведены на прошлой лекции). Также понятно, что эти неприятные особенности решения касаются только того сценария, когда они наиболее характерны, т.е. именно сверхнаправленных решений задачи синтеза. Если заданная ДН не является сверхнаправленной для заданной антенны и, следовательно, может быть реализована с хорошей точностью при условии пренебрежимо малых потерь подводимой к антенне мощности или даже точно, то и проблем с таким решением никаких нет – невязка мала (или даже нулевая), реактивная мощность ничтожна, поле на антенне имеет достаточно плавную зависимость от координаты вдоль антенны и устойчиво к малым изменениям заданной ДН.

Чтобы не отвлекаться на перелистывание предыдущих лекций, приведем здесь заново те основные выражения, которые нам по-прежнему будут нужны.

Среднеквадратичный критерий минимизации невязки (10.5) на конечном интервале видимых углов (11.1) имеет вид:

$$J^2 = \int_{-z_0}^{+z_0} |D(z) - R(z)|^2 dz \rightarrow \min, \quad z_0 = \pi \frac{L}{\lambda} \quad (14.1)$$

Полная излучаемая антенной мощность как сумма мощности активного поля (распространяющегося в дальнюю зону) и мощности реактивного поля (рассеянного в непосредственной близости от антенны на расстояниях в несколько длин волн) рассчитывается следующим образом:

$$P_{\Sigma} = P_{act} + P_{react} = \int_{-\infty}^{+\infty} |R(z)|^2 dz \quad (14.2)$$

$$P_{act} = \int_{-z_0}^{+z_0} |R(z)|^2 dz, \quad P_{react} = \int_{-\infty}^{-z_0} |R(z)|^2 dz + \int_{z_0}^{+\infty} |R(z)|^2 dz$$

Отношение (11.4) активной мощности к полной (обратная добротность антенны), которое, по физическому смыслу, есть коэффициент передачи полной мощности, подводимой к антенне, в дальнюю зону, имеет вид:

$$q = \frac{P_{act}}{P_{\Sigma}} \quad (14.3)$$

Такая величина, по сути, есть своего рода к.п.д. излучающей антенны в смысле эффективности использования подводимой к ней мощности.

Итак, если мы отталкиваемся от того требования к антенне, чтобы ее полная мощность (14.2) при уменьшении среднеквадратичной невязки (14.1) не становилась слишком большой и, соответственно, величина отношения (14.3) – слишком малой, значит, нам нужно задать ограничения на эти величины. Разумеется, это должны быть ограничения сверху для полной мощности и снизу – для величины (14.3). Важно также, что эти ограничения должны быть заданы наравне с самой заданной ДН, т.е. они должны быть частью постановки задачи приближенного синтеза. Далее можно двигаться к получению решения двумя путями.

Первый путь – решать задачу методом последовательных приближений (итераций). Это значит, что на каждом шаге уменьшения невязки (14.1) необходимо сопоставлять получающиеся значения величин (14.2), (14.3) с заданными ограничениями и принимать решение – двигаться дальше к следующей итерации или остановиться на достигнутой величине невязки. Каждый такой шаг (итерация) заключается в нахождении аппроксимирующей ДН и отвечающего ей АФР, что достигается с помощью выбранного метода поиска приближенного решения. Например, с помощью уже знакомой нам полиномиальной аппроксимации путем последовательного повышения степени полинома при том условии, что вспомогательная функция $U_m(z)$ выбрана «с запасом» по величине своего параметра m (см. лекцию 11).

Такой путь, с постоянной «оглядкой» на заданные дополнительные (к невязке) критерии, представляется интуитивно совершенно понятным, но не вполне строгим в смысле процедуры приближенного синтеза (нахождения ДН и АФР) – она осталась, фактически, той же, ничего нового в ней самой не появилось, а тот контроль ограничений, который нам нужен, является дополнительным по отношению к ней элементом. Такой метод, как в подобных случаях говорят, является эвристическим, т.е. основанным на интуиции и практическом опыте. Главное в нем – «не промахнуться» с первой итерацией (т.е. не задать слишком малую невязку для начальной аппроксимации, чтобы сразу не оказаться за пределами ограничений по мощности) и корректно выбрать величину последующих приближений (не слишком малую, чтобы не затягивать слишком сам процесс, и не слишком большую, чтобы «не проскочить» оптимальную величину

невязки). Как правило, выбор этих величин делается на основе предыдущего опыта решений подобных задач, т.е. опять же эвристически.

Второй и более перспективный путь – попытаться изменить саму процедуру минимизации невязки и таким именно образом, чтобы ограничение на полную мощность оказалось «внутри» тех уравнений, которые определяют такую процедуру математически. Тогда регуляризация решения произойдет «автоматически» в смысле достижения той предельной величины невязки, при которой антенна еще не становится сверхнаправленной. В отличие от предыдущего, такой подход может быть математически строго обоснован и формализован. В рамках нашего курса мы не будем погружаться в этот вопрос глубоко, но основные аспекты отметим и попытаемся в них разобраться.

Дальнейший материал этой лекции и следующей (за исключением ее заключительной части, в которой содержится анализ выражения (15.7) и выводы) является относительно более сложным и ориентирован в основном на студентов магистратуры, посещающих данный курс.

Итак, основная идея метода регуляризации приближенных решений задачи синтеза заключается в следующем. Поскольку невязка вида (14.1), как мы уже отмечали ранее, по своему физическому смыслу есть мощность разностной ДН $(D(z) - R(z))$ на заданном интервале угловой переменной, то она имеет ту же самую «энергетическую» размерность, что и задаваемое нами ограничение на полную мощность. Следовательно, мы вправе построить комбинацию этих величин и сформулировать, вместо критерия (14.1) минимизации «чистой» невязки, новый критерий в следующем виде:

$$J_r^2 = \int_{-z_0}^{+z_0} |D(z) - R(z)|^2 dz + \mu P_\Sigma \rightarrow \min \quad (14.4a)$$

$$P_\Sigma \leq P_0. \quad (14.4b)$$

Здесь нижний индекс r (от англ. *regular*) указывает на изменение критерия в целях регуляризации решения задачи, P_0 – заданное заранее ограничение на полную мощность антенны. Параметр μ есть неопределенный пока параметр этого критерия, его назначение – уравновесить вклад в данный критерий обеих его составляющих. Очевидно, что поскольку величина P_Σ много больше мощности разностной ДН (первого слагаемого), то этот параметр должен быть малым, $\mu \ll 1$, иначе искомое решение будет обеспечивать только лишь минимизацию полной мощности, в то время как невязка сможет принимать весьма большие значения (другими словами, от ее величины критерий будет зависеть слабо).

Критерий (14.4) по сути своей обеспечивает тот компромисс, о котором шла речь ранее: он «уравновешивает» два внутренне противоречивых критерия качества искомого решения. Действительно, приближение к слишком малой величине невязки будет сдерживаться быстро растущим при этом значением полной мощности, которое не должно превысить заданную величину P_0 . И наоборот: пока невязка не слишком мала, то

мощность имеет определенный «запас» для роста, и тогда мы имеем возможность добиться лучшего качества аппроксимации заданной ДН. Таким образом, путем изменения величины P_0 при заданной величине μ или, наоборот, путем изменения величины μ при заданной P_0 мы можем управлять качеством получаемого решения задачи синтеза антенны как по величине ее энергетической эффективности (по отношению активной мощности к полной мощности), так и по качеству приближения полученной ДН к заданной ДН (по величине невязки).

С математической точки зрения, мы имеем здесь стандартную постановку задачи вариационного исчисления: необходимо найти минимум величины (14.4а) путем варьирования ДН $R(z)$ при дополнительном условии (14.4б). Тогда становится ясно, что множитель μ есть не что иное, как неопределенный множитель Лагранжа, величина которого может быть найдена из этого дополнительного условия, но без него она становится произвольной по нашему выбору (потому и называется неопределенным множителем).

Формальная процедура поиска решения вариационных задач студентам хорошо известна из общих курсов математики. Вспомним ее кратко применительно к нашей постановке: надо найти производную функционала (14.4а) по варьируемой переменной (в ее роли выступает функция $R(z)$) и приравнять производную к нулю (обеспечить выполнение условия на экстремум), откуда получить уравнение для оптимальной (в смысле реализации экстремума) ДН $R(z)$. Далее, разрешая это уравнение относительно $R(z)$, найти оптимальную аппроксимирующую ДН, но еще не окончательное решение – эта диаграмма, как и полная мощность, будет иметь параметрическую зависимость от «свободной» пока величины μ . Последняя должна быть найдена из ограничения (14.4б), т.е. из уравнения:

$$P_{\Sigma}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |R(z, \mu)|^2 dz = P_0 \quad (14.5)$$

и окажется в результате зависящей от заданной величины P_0 . После этого решение для ДН $R(z, \mu)$ принимает окончательный вид, ожидаемо приобретая зависимость от величины P_0 как от параметра. Далее, по найденной ДН $R(z, P_0)$ надо найти АФР $F(y, P_0)$ одним из методов точного синтеза (см. лекцию 8), что позволит считать задачу полностью решенной.

В целом, новая процедура поиска приближенного решения задачи синтеза с учетом регуляризации кажется ясной, но только в самых общих чертах. Для того, чтобы продвинуться дальше и «почувствовать» ожидаемые решения для ДН $R(z)$ и АФР $F(y)$, воспользуемся уже известным нам методом парциальных диаграмм (МПД). Но в отличие от МПД как метода точного синтеза антенны, в данной постановке нам нужны парциальные ДН другого вида, а именно, такие ДН, которые обладают полнотой на конечном интервале переменной z , для которого мы поставили задачу синтеза. Поскольку

уже знакомые нам парциальные диаграммы вида $D_n(z) = \frac{\sin(z - \pi n)}{(z - \pi n)}$ не обладают таким свойством, будучи взаимно ортогональными только на бесконечном интервале, то они не годятся для этого. Точнее, использовать их мы можем, но это не будет удобно с точки зрения нахождения коэффициентов разложения заданной ДН $D(z)$ по такой системе парциальных диаграмм и «не экономно» с точки зрения числа членов такого разложения (известно, что разложение в ортогональном базисе всегда приводит к минимальному количеству членов разложения, будь то разложение вектора или функции).

Задание студентам:

вспомнить материал лекции 8 и метод парциальных диаграмм в качестве точного синтеза линейной антенны, обратить еще раз внимание на связь метода с необходимым условием существования точного решения.

Как и раньше, когда мы разбирали метод полиномиальной аппроксимации (см. лекцию 11), мы забежим немного вперед – предположим, что система таких парциальных ДН, обозначаемых в дальнейшем $S_n(z)$, нам уже известна, и будем с ней работать. Взаимная ортогональность означает, что они удовлетворяют условию:

$$\int_{-z_0}^{+z_0} S_n(z) S_m^*(z) dz = \lambda_n \delta_{nm}, \tag{14.6}$$

где δ_{nm} – дельта-символ Кронекера, а каждое из значений λ_n есть, по физическому смыслу, активная мощность излучения, отвечающая соответствующей парциальной ДН:

$$\lambda_n = \int_{-z_0}^{+z_0} |S_n(z)|^2 dz, \quad 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots > 0 \tag{14.7}$$

Порядок следования значений λ_n выбран здесь по убыванию, хотя некоторые из соседних могут принимать одинаковые значения. Очевидно, можно и в обратном порядке пронумеровать этот ряд, главное – сделать его упорядоченным определенным образом (для удобства).

Еще не зная конкретного вида таких парциальных ДН, но исходя только из общих выражений (14.6), (14.7), можно сделать важный качественный вывод: с ростом своих номеров парциальные ДН постепенно «вытекают» из заданного интервала $|z| \leq z_0$. Другими словами, доля активной мощности в полной мощности излучения, отвечающей каждой парциальной ДН (14.6), становится с ростом ее номера все меньше. В свою очередь, это позволяет сделать следующие важные утверждения:

- 1) привлечение к построению аппроксимирующей ДН парциальных ДН высоких номеров (с малыми λ_n) приводит только к росту реактивной мощности синтезируемой антенны;
- 2) регуляризация решения означает ограничение числа членов разложения аппроксимирующей ДН в базисе парциальных ДН;

3) МПД позволяет реализовать идею регуляризации решения простым и естественным образом – путем ограничения числа парциальных ДН, привлекаемых к синтезу антенны.

Вооружившись этими качественными соображениями и уже предвосхитив отчасти будущий результат, двинемся дальше по пути уточнения нужной нам процедуры.

Согласно общей идее МПД, будем искать решение для аппроксимирующей ДН в виде разложения в базисе парциальных ДН:

$$R_N(z) = \sum_{n=1}^N a_n S_n(z) \quad (14.8)$$

Нижний индекс в обозначении $R_N(z)$ указывает на то, что аппроксимирующая ДН «чувствует» ограничение на число N членов разложения – чем оно больше, тем лучшее приближение к заданной ДН мы можем получить, подбирая коэффициенты ряда (14.8). Сами коэффициенты и общее число членов этого разложения нам пока не известны, но уже понятно, как их можно будет найти. Для этого, как и раньше (при поиске точного решения), надо воспользоваться разложением заданной ДН в том же базисе парциальных ДН и найти коэффициенты этого разложения:

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n S_n(z) \quad (14.9)$$

$$b_n = \int_{-z_0}^{+z_0} D(z) S_n^*(z) dz$$

Здесь число членов разложения может быть произвольным (без ограничений) – оно определяется видом самой ДН $D(z)$ и заранее неизвестно, поэтому суммирование ряда (14.9) в общем случае должно вестись по полной системе парциальных ДН, включая и те, которые имеют самые малые значения λ_n (14.7) для высоких номеров (формально, бесконечно высоких).

Таким образом, задача сводится к установлению связи между искомыми коэффициентами разложения (14.8) с найденными из разложения (14.9) коэффициентами b_n . Найдем эту связь – построим аппроксимирующую ДН и затем решение для АФР. Для этого подставим оба разложения в выражение для критерия (14.4а), учитывая ключевое условие взаимной ортогональности парциальных ДН (14.6):

$$J_r^2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n |a_n - b_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n |b_n|^2 + \mu \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m^* \gamma_{nm} \quad (14.10)$$

Последнее слагаемое с двойным суммированием есть полная и умноженная на μ мощность излучения, отвечающая ДН (14.8):

$$P_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_N(z)|^2 dz = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m^* \gamma_{nm}, \quad \text{где } \gamma_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(z) S_m^*(z) dz \quad (14.11)$$

Множители γ_{nm} есть коэффициенты взаимной ортогональности парциальных ДН $S_n(z)$ на бесконечном интервале переменной z , включая область $|z| > z_0$. Условие (14.6) их взаимной ортогональности на конечном интервала еще не означает, конечно, что они являются взаимно ортогональными и на бесконечном интервале.

Далее, стандартно находим экстремум величины (14.10) как функции переменных (a_n, a_m^*) путем дифференцирования по одной из них, например, по переменной a_m^* , и приравнивая полученные выражения к нулю. В результате получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_n(\mu)$:

$$\lambda_n a_n + \mu \sum_{m=1}^N a_m \gamma_{nm} = \lambda_n b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14.12)$$

Полученная система N уравнений относительно N неизвестных величин позволяет их найти по известным коэффициентам b_n , а вместе с ними, — аппроксимирующую ДН путем суммирования ряда (14.8). Но здесь не хватает еще одного уравнения для нахождения неопределенного множителя μ , которое, как мы уже знаем, должно следовать из заданного ограничения на полную мощность:

$$P_\Sigma = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n(\mu) a_m^*(\mu) \gamma_{nm} = P_0 \quad (14.13)$$

Таким образом, мы имеем систему $(N+1)$ уравнений для нахождения такого же количества неизвестных. На этом можно поставить точку и считать задачу решенной, поскольку дальше остаются только «технические» вопросы разрешения этой системы.

Существенно дальше, однако, мы сможем продвинуться, если предположим, что система парциальных ДН $S_n(z)$ все-таки обладает взаимной ортогональностью на бесконечном интервале, т.е. если дополнительно к условию (14.6) выполняется условие:

$$\gamma_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(z) S_m^*(z) dz = \delta_{nm} \quad (14.14)$$

Выставить такое дополнительное требование мы вполне вправе, хотя бы из собственного желания заметно упростить процедуру получения решения. Почему бы и нет? В любом случае, пока что это только наше пожелание к парциальным ДН как «инструменту» решения задачи, не более того. Но если условия (14.14) действительно выполняются для наших парциальных ДН, то упрощение оказывается радикальным: двойные суммы в (14.11), (14.13) становятся однократными, уравнения (14.12) «расцепляются» – все коэффициенты $a_n(\mu)$ теперь находятся независимо друг от друга:

$$a_n = \frac{b_n}{1 + \frac{\mu}{\lambda_n}}, \quad (14.15a)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{b_n^2}{\left(1 + \frac{\mu}{\lambda_n}\right)^2} = P_0 \quad (14.156)$$

Как видно, наше желание, чтобы было попроще и яснее, полностью оправдалось. Решение (14.15а), в отличие от системы уравнений (14.12), в явном виде показывает связь известных коэффициентов z_0 разложения заданной ДН с искомыми коэффициентами a_n (14.8), и из этой связи хорошо видно, как «работает» ожидаемая нами регуляризация решения. Теперь ясно, что если разложение (14.9) для заданной ДН содержит парциальные ДН высоких номеров, для которых $\lambda_n \ll 1$, то их вклад в ряд (14.8) будет сильно подавлен благодаря росту знаменателей в (14.15а): для таких членов ряда выполняется соотношение $a_n \ll b_n$. В то же время, «старшие» парциальные ДН первых номеров с относительно высокими значениями $\lambda_n \approx 1$ имеют практически те же коэффициенты разложения, что и заданная ДН: для них $a_n \approx b_n$, т.е. именно эти парциальные ДН обеспечивают приближение $R_N(z)$ к $D(z)$ и уменьшение невязки. Видно также, что если мы положим $\mu = 0$, т.е. вернемся обратно к критерию (14.1) и «занулим» регуляризацию, то получим строгое равенство $a_n = b_n$ для всех номеров n , участвующих в разложении (14.9), включая и те, для которых $\lambda_n \ll 1$. Но если таковые реально присутствуют в разложении $D(z)$, т.е. заданная ДН является сверхнаправленной, то отказ от регуляризации точно приведет к получению высоких значений реактивной мощности синтезированной антенны со всеми вытекающими отсюда негативными следствиями. Это значит, что пусть малые, но ненулевые значения μ необходимы для регуляризации и, по сути своей, эта величина и есть параметр регуляризации. Следовательно, мы в явном виде убедились в целесообразности «компромиссного» критерия (14.4).

Таким образом, исключение из синтеза «младших» парциальных ДН $S_n(z)$ с малыми значениями λ_n обеспечивает ожидаемую нами стабилизацию решения по величине полной излучаемой мощности. Если же такие парциальные ДН изначально «не заняты» в разложении заданной ДН, то они тем более не участвуют в формировании аппроксимирующей ДН. Но тогда никакой сверхнаправленности и нет, а решение не нуждается в регуляризации – малая величина невязки может быть получена без введения дополнительного ограничения на полную мощность излучения.

Можно еще более убедиться в том, что привлечение к построению аппроксимирующей ДН именно тех парциальных ДН (14.6), для которых $\lambda_n \ll 1$, приводит к сверхнаправленности и потому должно быть ограничено. Для этого выпишем выражение для обратной добротности антенны (14.3) как функции найденных коэффициентов разложения (14.8), используя оба условия ортогональности (14.6) и (14.14) для системы парциальных ДН:

$$q_N = \frac{\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \lambda_n}{\sum_{n=1}^N |a_n|^2}. \quad (14.16)$$

Видно отсюда, что если в построении ДН (14.8) участвует достаточно много парциальных ДН с малыми значениями λ_n , то отношение (14.16) становится относительно малым, и чем больше таких слагаемых в числителе, тем оно только меньше. Это и означает растущее преобладание реактивной мощности в полной мощности излучения. Следовательно, необходимо подавить вклад таких слагаемых, что достигается путем сокращения числа членов разложения (числа N) до такой величины, пока большинство «занятых» при этом парциальных ДН имеют достаточно большие значения λ_n (14.7), близкие к единице.

Таким образом, метод регуляризации сверхнаправленных решений задачи синтеза и сам подход к ее достижению становится качественно понятным: к построению аппроксимирующей ДН $R_N(z)$ необходимо привлекать только «старшие» парциальные ДН, их количество будет определять достигаемое качество аппроксимации. Если заданная ДН $D(z)$ является сверхнаправленной, это означает, что в ее разложении заведомо участвуют «младшие» парциальные ДН, которые затем исключаются из построения ДН $R_N(z)$. Следовательно, именно в таком ограничении числа членов ряда (14.8) при синтезе антенны и заключается нужный нам компромисс между качеством приближения к заданной ДН и «потребительскими» свойствами полученного решения, делающими его не сверхнаправленным, но практически реализуемым.

Лекция 15. Регуляризация сверхнаправленных решений задачи синтеза (продолжение)

Обсудив в конце прошлой лекции свойства и физический смысл полученного решения с ограничением эффектов сверхнаправленности, вернемся теперь к самой системе парциальных ДН, которая нам обеспечила такую регуляризацию.

Итак, комбинация сразу двух условий взаимной ортогональности (14.6) и (14.14) указывает на то, что «заказанные» нами парциальные ДН являются ортогональными дважды – и на конечном, и на бесконечном интервалах обобщенной угловой переменной. Такие замечательные функции действительно существуют и хорошо известны, они так и называются – *функции двойной ортогональности*. Остается только познакомиться с ними поближе.

Прежде всего, вернемся к уже отмеченному выше свойству таких функций: с ростом своего номера они постепенно «вытекают» из конечного интервала своей «основной» ортогональности, необходимой для самой процедуры их использования в качестве базиса парциальных ДН. Действительно, из одновременного выполнения

условий (14.6) и (14.14) прямо следует, что значения λ_n имеют смысл коэффициентов (14.3) для парциальных ДН:

$$\lambda_n = \frac{\int_{-z_0}^{z_0} |S_n(z)|^2 dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S_n(z)|^2 dz}, \quad (15.1)$$

что, согласно выбранному нами порядку нумерации (14.7), подтверждает справедливость такого утверждения. В этом своем качестве, такие парциальные ДН явно похожи на уже знакомые нам парциальные ДН $D_n(z) = \frac{\sin(z - \pi n)}{(z - \pi n)}$, поскольку главные лепестки последних с ростом номера тоже монотонно смещаются в сторону больших значений переменной z , и для достаточно высоких номеров, для которых $|n| > z_0/\pi = L/\lambda$, они оказываются за пределами интервала $|z| \leq z_0$. Далее, как мы уже знаем, малые значения λ_n указывают на то, что отвечающие им парциальные ДН $S_n(z)$ являются «носителями» высоких значений реактивной мощности. Следовательно, если спектр значений λ_n имеет «ступенчатый» вид, т.е. при достижении некоторого критического значения $n = N_0$ начинается достаточно резкий переход от относительно высоких значений $\lambda_n \approx 1$ к малым значениям $\lambda_n \ll 1$, то мы имеем все основания ограничить число привлекаемых к синтезу парциальных диаграмм именно этим значением. Но так и должно быть по смыслу, поскольку, как только главной лепесток парциальной ДН (с некоторым номером) окажется на границе интервала $|z| \approx z_0$, то все последующие ДН будут иметь свои главные лепестки уже за пределами этого интервала, а значит, их значения λ_n резко уменьшатся. Таким образом, еще не зная точного вида самих этих функций двойной ортогональности, мы уже довольно многое (и для нас наиболее существенное) можем сказать относительно их свойств.

Изложенные представления относительно основных для нас свойств парциальных ДН в виде функций двойной ортогональности иллюстрируются (пока качественно) на рис. 15.1. Без претензии на точность, на этом рисунке показано главное: монотонное смещение вправо главных максимумов с ростом номера функции и резкий спад значений λ_n для номеров, отвечающих «выходу» главных лепестков за пределы интервала $|z| \leq z_0$ (показана только положительная полуось переменной z , поскольку нет оснований предполагать отсутствие симметрии этих функций относительно нулевого аргумента).

Достаточно подробные математические сведения и ссылки на оригинальные работы по функциям двойной ортогональности можно найти в рекомендованной монографии [3, §§ 2.7, 7.3]). Эти функции получили несколько необычное название — *вытянутые сфероидальные волновые функции* (в оригинале — *prolate spheroidal wave functions*). Аппарат таких функций был разработан в 1960-х годах группой математиков из компании Bell Systems (США) вне связи с теорией антенн, но вскоре он оказался очень

кстати и в этой области, и в более широких применениях — в тех разделах физики и техники, где применяются системы и сигналы финитного спектра.

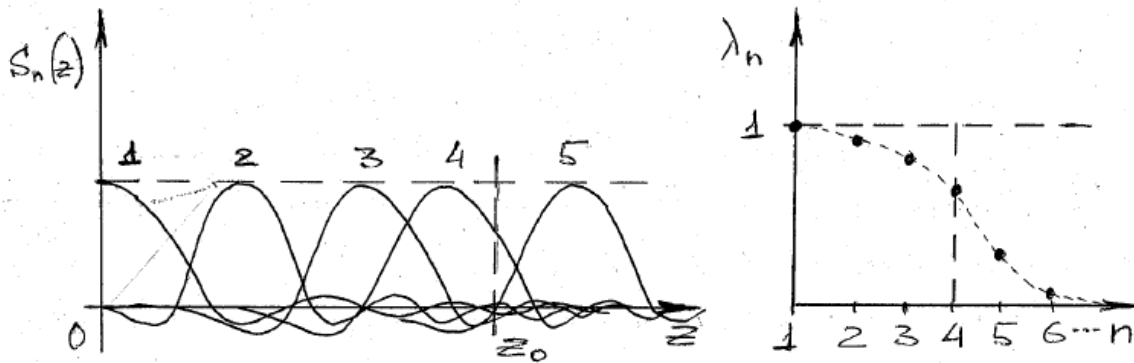


Рисунок 15.1. Качественный вид парциальных ДН $S_n(z)$ (14.6), (14.14) и отвечающего им распределения значений λ_n (14.7), (15.1)

На рис. 15.2 (заимствован из [3]) показаны уже конкретные численные примеры функций двойной ортогональности для некоторых значений z_0 , построенные в зависимости от величины z/z_0 (граница интервала невязки отмечена вертикальной чертой). Что касается примеров для значений λ_n , то для двух значений $z_0 = 4, 8$ они оказываются следующими (с точностью до второго знака после запятой):

$$\lambda_n = 1,00; 0,91; 0,52; 0,11; 0,01; 0,00 \text{ (три старших значения для } z_0 = 4),$$

$\lambda_n = 1,00; 1,00; 1,00; 0,96; 0,75; 0,32; 0,06; 0,01; 0,00$ (пять старших значений для $z_0 = 8$).

Из приведенных примеров хорошо видно, что выбор системы парциальных ДН на основе функций двойной ортогональности полностью отвечает нашим ожиданиям:

- 1) парциальные ДН имеют ярко выраженный главный лепесток;
- 2) с ростом номеров парциальных ДН их главные лепестки монотонно смещаются в область больших значений угловой переменной, и при достижении некоторого номера, пропорционального пороговой величине z_0 , они оказываются за ее пределами; это и означает «вытекание» ДН высоких номеров из области видимых углов и резкий рост связанной с такими ДН реактивной мощности (уменьшение величин λ_n);

3) распределение значений λ_n имеет характерный вид «ступеньки», ширина которой (число старших значений) имеет оценку $N_0 \approx 2z_0/\pi = 2L/\lambda$, т.е. полностью определяется волновым размером антенны:

$$\begin{cases} \lambda_n \approx 1 & \text{при } n \leq \frac{2z_0}{\pi} = \frac{2L}{\lambda} \\ \lambda_n \ll 1 & \text{при } n \geq \frac{2L}{\lambda} \end{cases} \quad (15.2)$$

Последнее свойство вновь указывает нам на ту ключевую роль, которую играет во всей задаче синтеза антенны ее волновой размер: чем он больше, тем большее число парциальных ДН мы можем использовать для аппроксимации заданной ДН и тем самым обеспечить более высокое качество приближенного решения, еще не опасаясь за высокие значения реактивной мощности и «раскачку» полученного АФР антенны.

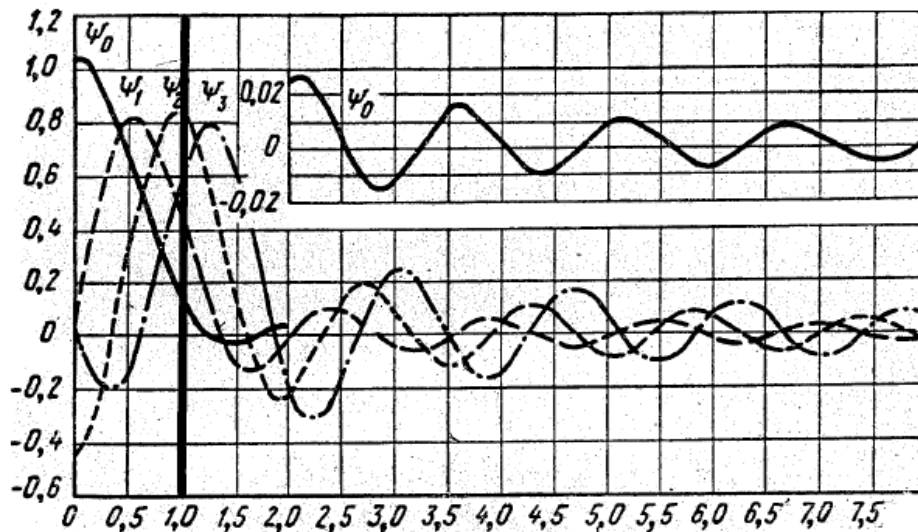
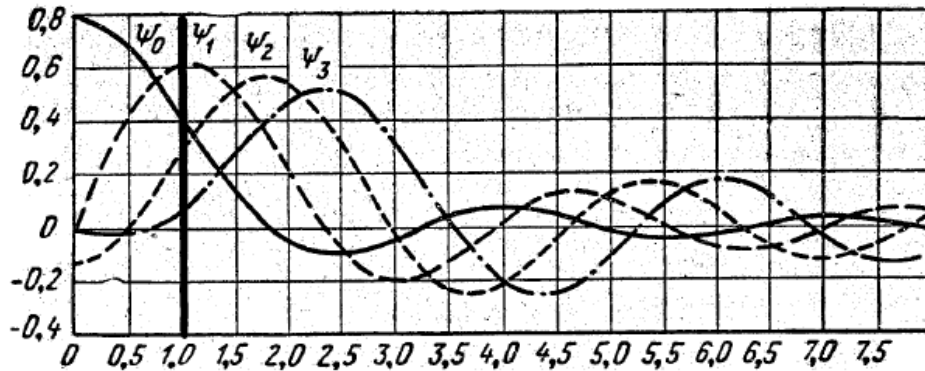


Рисунок 15.2. Функции двойной ортогональности $\Psi_n(z/z_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при различных значениях параметра z_0 (величины интервала аппроксимации): $z_0 = 2$ (вверху), $z_0 = 4$ (внизу) [3]. По оси абсцисс отложена нормированная величина z/z_0 (вертикальной чертой отмечена граница интервала)

Но есть еще одно замечательное и даже удивительное свойство этих функций. Оказывается, они являются собственными функциями преобразования Фурье на конечном отрезке. За этой математической формулировкой скрывается очень полезный для нас результат, на который мы и не рассчитывали:

$$\nu_n S_n(z) = \int_{-1}^1 S_n(y) e^{izy} dy, \quad (15.3)$$

где значения ν_n , которые есть собственные значения уравнения (15.3), прямо связаны со значениями (14.7): $\lambda_n \sim |\nu_n|^2$. Но поскольку уравнения (15.3) имеют в точности тот вид, который имеет «антенное» уравнение связи АФР и ДН, то из них прямо следует, что нужные нам парциальные АФР выражаются в точности через те же функции двойной ортогональности, только уже по другой переменной. В итоге мы сразу, не решая отдельную задачу поиска парциальных АФР, получаем окончательное выражение для искомого АФР в виде ряда парциальных АФР $S_n(y)$ с амплитудами (14.15а), которые зависят, как мы уже понимаем, не только от амплитуд b_n , но и от заданного ограничения P_0 на полную мощность антенны (через величину μ согласно равенству (14.15б)):

$$F_n(y) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n(b_n, P_0)}{\nu_n} S_n(y), \quad |y| \leq 1. \quad (15.4)$$

Для полноты кратких сведений об этих интересных функциях приведем еще одно интегральное уравнение, собственными функциями которого они являются. Из этого уравнения они рассчитываются вместе со своими собственными значениями λ_n :

$$\lambda_n S_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{\sin(z - z')}{z - z'} S_n(z, z') dz' \quad (15.5)$$

Следует обратить внимание, что ядром этого интегрального уравнения является функция $\text{sinc}(z - z')$, которая, как мы хорошо знаем, является идеальной (в смысле простоты) функцией финитного спектра. Если эта функция есть ДН антенны, как в нашей постановке, то реализующее ее АФР есть не что иное, как простейшее АФР фазированной (в направлении угла, отвечающему величине z) антенны с равномерным амплитудным распределением (см. лекции 5,8). Появление этой «сканирующей» по переменной z диаграммной функции в уравнении (15.5) характерно – это еще одно свидетельство того, что функции двойной ортогональности эффективно «работают» в качестве парциальных ДН для антенн конечных волновых размеров.

В завершение лекции и всего раздела по задаче синтеза антенн обратимся вновь к важнейшему вопросу о влиянии волнового размера антенны.

Мы уже знаем, что ответ на вопрос о том, является ли заданная диаграмма сверхнаправленной или нет (а от этого зависит и выбор метода решения – с регуляризацией или без нее), критически зависит от заданного волнового размера антенны: чем больше этот размер, тем более направленную диаграмму мы можем реализовать и тем самым обеспечить высокую фокусировку излучаемой мощности в более узкий диапазон углов, отвечающий ширине главного максимума. При этом мы также знаем, что дело даже не в направленности как таковой, но в максимальных значениях производной заданной диаграммной функции. Осталось это знание подкрепить

подходящей количественной оценкой, которая в явном виде свяжет эти два ключевых параметра нашей задачи: волновой размер антенны и максимальное значение производной заданной ДН.

Вернемся для этого к исходному уравнению связи между ДН и АФР линейной антенны в исходных переменных координаты вдоль антенны и угла, отсчитываемого от нормали к антенне:

$$R(\theta) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \quad (15.6)$$

Здесь в качестве ДН стоит именно $R(\theta)$, которая точно отвечает АФР $F(x)$ (прямая задача расчета ДН), или наоборот – под интегралом стоит именно то АФР, которое точно соответствует «своей» реализуемой ДН (обратная задача расчета АФР). Дифференцируя обе части этого уравнения по угловой переменной ϑ (интеграл дифференцируется по углу как по параметру, поскольку он не является переменной интегрирования), легко получаем оценку сверху для максимума модуля производной ДН:

$$\max |R'(\theta)| \leq \pi \frac{L}{\lambda} \cos \theta^* \max |R(\theta)| = \pi \frac{L}{\lambda} \cos \theta^*$$

Здесь угол θ^* есть тот угол, при котором производная ДН достигает своего максимального значения (очевидно, он отличается от направления главного максимума, для которого производная строго равна нулю, хотя может быть и близким к нему). В результате получаем *оценку снизу* для волнового размера антенны, которая определяется не только максимальной величиной производной ДН (как мы и ожидали), но еще и значением соответствующего угла θ^* :

$$\pi \frac{L}{\lambda} \geq \frac{\max |R'(\theta)|}{\cos \theta^*}. \quad (15.7)$$

Отсюда ясно, что при малых значениях угла $\theta^* \ll 1$, когда $\cos \theta^* \approx 1$, именно максимум производной определяет требования на необходимую величину волнового размера антенны. Но в случае больших значений этого угла, близких к краям диапазона видимых углов, требования на волновой размер сильно ужесточаются вследствие малой величины знаменателя в правой части (15.7). Рассмотренный в лекции 13 пример синтеза антенны по диаграмме $D(\vartheta) = \cos \vartheta$ получает здесь свое подтверждение, поскольку для такой ДН угол $\vartheta^* = \pi/2$. Следовательно, для точного ее воспроизведения требуется антенна бесконечной длины, а попытка синтеза АФР при любой конечной длине антенны неизбежно приводит к ее сверхнаправленности по мере приближения аппроксимирующей диаграммы $R(\vartheta)$ к заданной, что и было показано на рис. 13.2.

Казалось бы, оценка (15.7) дает нам новое необходимое условие существования точного решения задачи синтеза, дополнительное к условию финитного спектра. Но так ли это на самом деле? Конечно, нет – поскольку максимальные значения модуля производной и ширина спектра диаграммной функции «знают» друг о друге и

пропорциональны друг другу. Чем больше значения производной ДН, тем более высокая (резкая) изменчивость характерна для ее отдельных фрагментов, значит, тем более широким является ее спектр и больший волновой размер антенны требуется для ее получения. Следовательно, условие (15.7) есть, фактически, то же самое необходимое условие существования точного решения, только выраженное иначе – не через спектральные, а математические свойства заданной ДН как функции своего аргумента.

Таким образом, круг нашего рассмотрения задачи синтеза антенны успешно замкнулся — мы вернулись ровно к началу, к условию существования точного решения, но уже с пониманием всех ключевых аспектов задачи в целом, включая понимание методов ее решения и тех ограничений, которые сопровождают их применимость.

На этом мы завершаем анализ задачи синтеза антенны по заданной ДН, которая, как оказалось, содержит целый ряд нетривиальных аспектов. Главное, что было показано в этой части курса, заключается в следующем.

1. Постановка задачи синтеза практически свободна от ограничений на вид заданной ДН, если не ограничиваться требованием получения точного решения (точной реализации заданной диаграммы).

2. Если такое требование выдвигается, то заданная ДН должна удовлетворять необходимому условию существования такого решения для антенны заданного волнового размера – ее спектр должен быть локализован в определенных пределах или, что эквивалентно, максимальные значения модуля производной должны быть ограничены определенной величиной, пропорциональной волновому размеру антенны. При выполнении этих условий искомое АФР антенны может быть найдено с помощью методов точного синтеза – МИФ или МПД (какой покажется удобнее).

3. Если требование точного решения не выдвигается и допускается приближенное решение, то процедура его построения требует контроля свойств полученного решения как по величине полной и(или) реактивной мощности, так и по свойствам синтезированного АФР на апертуре антенны. Такой контроль необходим в случае, если заданный волновой размер антенны находится в существенном противоречии с условием (15.7). Для регуляризации решения задачи в этом случае может быть эффективно использован метод парциальных диаграмм на основе функций двойной ортогональности.

4. Возможность перехода антенны в сверхнаправленный режим при невыполнении условия (15.7) означает, что качество приближения полученной диаграммы к заданной, характеризуемое величиной невязки, имеет принципиальное ограничение – величина невязки не может быть получена меньше некоторой величины без сопутствующего и быстрого уменьшения доли активной мощности в полной мощности излучения.

5. При возможности варьирования длины антенны, она должна определяться согласованно с задаваемой ДН в соответствии с условием (15.7), что позволит исключить негативные свойства сверхнаправленного решения и обеспечить получение заданной ДН с высокой точностью. В противном случае, класс диаграмм, которые могут быть реализованы антенной некоторого фиксированного волнового размера, ограничен возможными эффектами сверхнаправленности.

Лекция 16. Статистическая теория антенн. Основные эффекты влияния флуктуаций в антенне на ее направленные свойства

Данной лекцией мы завершаем курс по теории антенн. Знакомство с основами ТАС, материал для которого был представлен в предыдущих лекциях, касалось *детерминированных* постановок прямой и обратной задач. В рамках этих постановок мы не учитывали возможное присутствие каких-либо случайных флуктуаций в самой антенне или в окружающем ее пространстве. Действительно, до этих пор мы исходили из того, что:

- 1) антенна имеет некоторую заданную форму своей апертуры (плоскую, линейную или некоторую другую, но не случайно изменчивую),
- 2) функция АФР является либо заданной (в прямой задаче), либо найденной в результате решения обратной задачи, но также не имеет флуктуаций,
- 3) среда распространения волн излучения антенны (или волн принимаемых сигналов от внешних источников излучения) не является случайно-неоднородной, т.е. в ней отсутствуют флуктуации тех характеристик, которые могут привести к случайному характеру распространяющихся сигналов – показателя преломления и коэффициента затухания.

Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то это следует учесть и количественно оценить влияние соответствующих флуктуаций на результаты расчета либо ДН и связанных с ней характеристик антенны (если мы ставим прямую задачу), либо АФР (если ставим обратную задачу). Весь этот круг вопросов теории антенных систем относится к тому ее разделу, который так и называется – *статистическая теория антенн* (СТА).

Краткий обзор задач статистической теории антенн

Интерес к задачам СТА возник не сразу, но тогда, когда стали разрабатываться и широко использоваться «большие антенны», т.е. излучающие или приемные (чаще приемные) антенные системы больших волновых размеров. На прошлых лекциях мы делали некоторые оценки характерных величин и уже знаем, что, например, антенны с волновым размером $\sim 10^3 - 10^4$ вполне типичны для применения в СВЧ радиолокации, при этом характерные расстояния, где «начинается» дальняя зона таких антенн, могут составлять единицы и первые десятки километров. Но эти оценки указывают только «начала» той области, где формируется расчетная ДН, сама же дальняя зона простирается гораздо дальше и может покрывать, соответственно, гораздо большие расстояния. В условиях, когда речь идет о реально большой (в указанном смысле) и технически сложной антенне, становится практически важным делом учесть какие-либо случайные внутренние или внешние воздействия – шумы (флуктуации) в цепях электроники возбуждения, случайные отказы в отдельных элементах, случайные колебания формы антенны и т.п. С другой стороны, на таких дистанциях, если речь идет о реальной природной среде (атмосфере для радиолокации или морской среде для гидролокации, где характерные дистанции тоже могут составлять единицы и даже сотни километров), значительное

«накопление» статистических эффектов распространения становится вполне ожидаемым из-за случайных флуктуаций в среде. Такие флуктуации есть всегда, но не всегда они существенны – это зависит от частотного диапазона и дистанции. Все сказанное означает, что во многих антенных приложениях учет каких-либо физических и технических механизмов появления случайных флуктуаций практически необходим для корректного применения самих антенн и соответствующих расчетов их характеристик.

Говоря об отмеченных физических механизмах появления случайных флуктуаций, важно понимать, что они не являются какими-то изолированными друг от друга с точки зрения анализа их влияния. Они разные по своей сути, но их влияние на направленные свойства антенны во многом эквивалентно друг другу. К примеру, случайная изменчивость апертуры протяженной антенны (вариации ее формы) может быть интерпретирована как случайная изменчивость фазового распределения (ФР) антенны. Действительно, смещение какого-либо элемента апертуры относительно другого приводит к тому, что соответствующим образом (в ту или иную сторону) меняются фазовые соотношения тех волн, которые излучаются (или принимаются) этими элементами. С другой стороны, случайные вариации показателя преломления в среде также приводят к тому, что фазовые соотношения волн от отдельных элементов антенны в точке наблюдения становятся случайными, т.е. они также физически эквивалентны флуктуациям ФР. Если же случайным образом варьирует показатель затухания в среде, то этот эффект эквивалентен случайной изменчивости амплитудного распределения (АР). Следовательно, для общего понимания основных эффектов СТА и их следствий достаточно остановиться на рассмотрении флуктуаций АФР, учитывая при этом, что физическая «подоплека» этих флуктуаций может быть реально различной.

Прежде чем переходить к более конкретным формулировкам задач, отметим, что первые основополагающие работы в области СТА были сделаны советскими специалистами в 1960-х годах. Большую роль здесь сыграла харьковская научная школа в области радиолокации. Монография [4], приведенная в списке литературы по данному курсу, переведена на многие языки и является первым в мире систематическим изложением основ СТА.

Как и в самой теории антенн, задачи СТА делятся на те же две большие группы — на прямые и обратные задачи, но теперь — с учетом статистических свойств АФР антенны.

Прямая задача СТА есть задача расчета статистических характеристик ДН и связанных с ней параметров при известных статистических свойствах АФР.

Прежде всего, интерес представляют средняя (в статистическом смысле) ДН по мощности, среднее направление главного максимума и его угловая ширина, средний КНД, средний УБЛ (определения этих величин в детерминированной постановке были даны в лекции 4). Понятно, что в условиях флуктуирующего АФР антенны ДН также будет флуктуировать, испытывать некоторое «дрожание» вокруг средней (фактически, сглаженной) диаграммы. То же самое относится и ко всем отмеченным параметрам – они также будут неизбежно флуктуировать вслед за ДН, и потому становится важным вопрос о нахождении усредненных величин. Это, своего рода, «программа-минимум» прямой

задачи СТА. Но не только средние величины могут представлять интерес – в некоторых приложениях требуется найти статистические моменты следующего порядка – дисперсию отклонений от среднего значения и взаимные корреляции. Например, количественно оценить не только среднее направление главного лепестка, но и то, насколько сильно он изменчив во времени (насколько значительна «дрожь» ДН как случайной функции времени) или насколько коррелированы значения ДН в разных угловых координатах. Так или иначе, исходной (заданной) информацией при этом являются соответствующие свойства АФР – средние значения, уровень случайных отклонений от среднего, взаимные корреляции этих отклонений по апертуре. Эти характеристики нужно либо моделировать и получать тем самым модельные расчеты статистических характеристик ДН, либо измерять их экспериментально, в процессе эксплуатации антенны, и тогда иметь реальную картину ее направленных свойств. Как и с любым сложным прибором, внутренние характеристики (параметры) которого по разным причинам могут быть не вполне стабильны во времени с некоторым статистическим разбросом, нужно иметь возможность контролировать эти характеристики и то, к чему подобная нестабильность может привести с точки зрения функционала данного прибора.

Таким образом, в самой краткой формулировке прямая задача СТА выглядит так: задаем статистику АФР — рассчитываем статистику ДН, и вслед за этим — статистику тех параметров, которые определяются через ДН. Следовательно, прямая задача СТА есть непосредственный аналог детерминированной прямой задачи.

Обратные задачи СТА более вариативны, в них больше различных сюжетов постановки (см., например, [1, Глава 13]). Прежде всего, здесь также есть прямой аналог обратной задачи в детерминированной постановке. Она формулируется так: задается некоторая ДН как детерминированная функция и по ней находится (точно или приближенно) АФР. Затем принимается в расчет, что найденное АФР имеет случайный характер (содержит флуктуации с известными статистическими свойствами), и рассчитывается невязка полученной ДН и заданной ДН с учетом этих флуктуаций – средняя величина невязки и дисперсия. При этом найденная изначально функция АФР есть, по смыслу, среднее АФР, на которое «навешиваются» флуктуации, приводящие (физически очевидно) только к росту невязки, т.е. к частичной потере качества полученного решения для АФР.

Но есть и такие постановки обратных задач СТА, которые не имеют своих аналогов в детерминированной теории. Например, задача реконструкции статистических свойств АФР антенны по известным (измеренным экспериментально) статистическим характеристикам ДН. По существу, это есть задача диагностики антенны по данным измерений ее ДН с учетом флуктуаций поля антенны, если они реально имеют место. При этом необходимо измерять не только средние значения ДН в наборе углов, но и вторые моменты — дисперсию флуктуаций и корреляционные характеристики ДН. В результате становится возможным получить статистический «портрет» самой антенны.

За неимением достаточного времени мы не будем касаться постановок и способов решения обратных задач СТА, тем более, что они достаточно сложны и требуют хорошей подготовки в области статистической радиофизики. Далее мы остановимся кратко только на основных особенностях решения прямой задачи СТА.

Влияние флуктуаций фазового распределения на диаграмму направленности антенны

Итак, используя те же нормированные антенные переменные, что и раньше, мы имеем теперь «случайное» уравнение связи АФР с ДН вместо «регулярного» уравнения (7.1):

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{F}(y) e^{-iyz} dy, \quad (16.1)$$

где знак волны сверху означает присутствие случайных флуктуаций в АФР и в ДН. Здесь для ДН использовано обозначение $\tilde{R}(z)$, т.е. это «реальная» ДН, отвечающая некоторому АФР антенны в виде линейного отрезка. Из уравнения (16.1) ясно видно, что случайная нестабильность АФР не может не сказаться на ДН, и следует ожидать, что более сильные флуктуации АФР приведут только к более значительным вариациям ДН.

Как уже отмечалось ранее, разработчиков и потребителей антенн в особой степени интересует ДН по мощности, средняя величина которой имеет вид следующего выражения:

$$\langle |\tilde{R}(z)|^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle F(y_1) F^*(y_2) \rangle e^{iz(y_2 - y_1)} dy_1 dy_2, \quad (16.2)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение (по времени или по ансамблю случайных реализаций).

Это самые общие выражения, и чтобы двигаться дальше, необходимо определиться с тем, как аналитически описывать случайную (с учетом флуктуаций) функцию АФР. Подходов к такому описанию используется обычно два: мультипликативный и аддитивный. В рамках первого из них мы записываем АР $\tilde{F}(y)$ в виде:

$$\tilde{F}(y) = |F_0(y)| e^{\tilde{\psi}(y)} e^{i\varphi_0(y) + i\tilde{\varphi}(y)} = |F_0(y)| e^{i\varphi_0(y)} e^{\tilde{\psi}(y) + i\tilde{\varphi}(y)} = F_0(y) e^{\tilde{\psi}(y) + i\tilde{\varphi}(y)} \quad (16.3)$$

Здесь первый множитель $F_0(y)$ – детерминированная (неслучайная) компонента АФР, которое имеет детерминированные функции АР (модуль АФР) и ФР (аргумент АФР). Множителем этого «опорного» (с нулевым индексом) АФР является случайная экспонента, имеющая действительный ($\tilde{\psi}(y)$) и мнимый ($i\tilde{\varphi}(y)$) показатели степени. Первый из них определяет флуктуации уровня АР, второй – флуктуации ФР. При их нулевых значениях мы имеем, очевидно, условие $\tilde{F}(y) = F_0(y)$, т.е. отсутствие каких-либо флуктуаций АФР и полностью детерминированную постановку прямой задачи. Другими словами, представление случайного АФР в виде (16.3) есть модуляция регулярного АФР случайной функцией времени $e^{\tilde{\psi}(y) + i\tilde{\varphi}(y)}$ (аргумент времени во этих выражениях опущен, но он неявно подразумевается через знак волны поверх соответствующих обозначений).

Аддитивная модель флуктуирующего АФР имеет другое представление:

$$\tilde{F}(y) = F_0(y) + \delta F(y), \quad \langle \delta F(y) \rangle = 0 \quad (16.4)$$

где $F_0(y)$ – среднее АФР, а $\delta F(y)$ – случайные отклонения АФР от среднего, т.е. флуктуации АФР, с нулевым средним значением. Первое слагаемое часто называют когерентной компонентой АФР, а второе – соответственно, некогерентной (случайной) компонентой. Понятно, что обе компоненты есть комплексные функции, в каждой из них есть «свои» АР и ФР (детерминированные или случайные). Ясно также, что при использовании (16.4) ДН антенны также будет иметь вид суммы когерентной и некогерентной компонент:

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_0(y) e^{-iyz} dy + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \delta F(y) e^{-iyz} dy. \quad (16.5)$$

В дальнейшем мы будем использовать вариант описания случайного АФР в виде (16.3), следуя классической монографии [4].

Интуитивно кажется ясным, что наибольший вклад в статистические искажения ДН вносят флуктуации ФР антенны. Это следует хотя бы из общего понимания того, что поле антенны в точке наблюдения является результатом интерференции полей всех тех источников, который распределены вдоль антенны – с обсуждения этого мы начали рассмотрение прямой задачи ТАС (см. лекцию 2). Интерференционная волновая картина, как хорошо известно, всегда наиболее чувствительна именно к фазовым соотношениям тех волн, которые ее формируют, и даже незначительные изменения этих соотношений приводят к существенной изменчивости самой картины. В то же время, амплитуды отдельных волн оказывают гораздо меньшее влияние – им нужно измениться сильнее, чтобы интерференционная картина их «почувствовала» и заметно изменилась. Исходя из этих соображений, сделаем несколько упрощающих предположений. Будем полагать, что флуктуации АФР (16.3) имеют только фазовое «происхождение», т.е. АР является детерминированным. Более того, будем полагать, что АР является равномерным вдоль апертуры, а среднее ФР является нулевым, т.е. антенна в среднем является наиболее простой и хорошо нам известной – синфазной антенной с единичным АР:

$$\tilde{F}(y) = e^{i\tilde{\varphi}(y)}, \quad F_0(y) = 1, \quad \langle \tilde{\varphi}(y) \rangle = 0 \quad (16.6a)$$

Далее, будем предполагать, что дисперсия фазовых флуктуаций $\sigma^2(y)$ вдоль антенны является постоянной величиной, т.е. ФР как случайная функция является пространственно-однородной:

$$\langle \varphi^2(y) \rangle = \sigma^2(y) = \sigma^2 \quad (16.6б)$$

Введем обозначение для коэффициента взаимных корреляций фазовых флуктуаций и будем полагать, что он зависит только от разности координат вдоль антенны (такие случайные процессы называют стационарными):

$$r(y_1, y_2) = \frac{\langle \tilde{\varphi}(y_1) \tilde{\varphi}^*(y_2) \rangle}{\sigma^2} = r(y_1 - y_2) \quad (16.6в)$$

На практике такие зависимости часто имеют вид монотонно спадающей функции, что отражает интуитивно понятное эвристическое соображение: чем больше расстояние между точками наблюдения этих флуктуаций, тем меньше их взаимная корреляция («далекие» флуктуации слабее коррелированы, чем более «близкие»). Для моделирования таких корреляционных функций и количественных оценок с их «участием» обычно выбирают простую аналитическую зависимость в виде экспоненты или гауссовой кривой, соответственно:

$$r_{\text{exp}}(y_1 - y_2) = e^{-\frac{|y_1 - y_2|}{c}}, \quad r_{\text{gauss}}(y_1 - y_2) = e^{-\left(\frac{y_1 - y_2}{c}\right)^2}. \quad (16.6г)$$

Обе эти зависимости характеризуются одним пространственным масштабом — радиусом (длиной) корреляции c . За пределами этого масштаба взаимные корреляции фазовых флуктуаций уже реально малы (меньше, чем $\sim 0,3$), хотя они нигде не равны нулю. Обратим внимание, что здесь этот важный параметр приведен в безразмерном нормированном виде, как и сама переменная y вдоль апертуры: $c = \frac{2r_c}{L}$, где r_c – радиус корреляции как размерная величина, L – длина антенны.

Таким образом, мы рассматриваем статистическую модель АФР (16.6) в удобном для анализа виде однородного и стационарного вдоль апертуры случайного ФР с нулевым средним значением. Параметрами этой модели (постоянными вдоль апертуры) являются дисперсия фазовых флуктуаций σ^2 и радиус их корреляции c .

Уточнив модель случайного ФР, мы можем теперь рассчитать влияние флуктуаций АФР на ДН, задавая различные значения этих параметров. По существу, подобным образом всегда и происходит моделирование некоторого физического процесса или явления: обоснованный выбор параметрической модели — выбор значений параметров — расчет — анализ и интерпретация результата.

Техника подобных расчетов на основе модели (16.6) и ей подобных подробно изложена в монографии [4] и последовавших за ней многочисленных публикаций по СТА. Она не столь сложная, но нас сейчас больше интересует физический результат – к чему именно приводят флуктуации ФР в зависимости от величин указанных параметров. Иллюстрации могут быть найдены в тех же изданиях, итог их сравнительного анализа качественно показан на рис. 16.1 для ДН по мощности, полученных на основе общего выражения (16.2).

На этом рисунке хорошо виден интуитивно ожидаемый результат: чем больше дисперсия флуктуаций, тем сильнее искажается ДН в смысле отличия от ДН, которая отвечает детерминированному АФР при условии $\tilde{\varphi}(y) = 0$. Видно также, что наиболее «чувствительной» к флуктуациям ФР является область нулей ДН – даже при слабых флуктуациях ($\sigma^2 \ll 1$) нули исчезают, хотя «провалы» в ДН еще остаются, в то время как область главного лепестка сначала практически не меняется. С дальнейшим ростом дисперсии изменения в ДН становятся все более значительными, она теряет свою

многолепестковую структуру, превращаясь в гораздо более плавную функцию угловой переменной, при этом уровень бокового излучения (УБЛ) монотонно растет. По существу, это означает частичную и затем практически полную потерю антенной своих направленных свойств, несмотря на значительный волновой размер. Ясно поэтому, что флуктуации ФР на уровне $\sigma^2 \sim 1$ и более являются недопустимыми и должны быть исключены на практике.

Отметим, что указанное здесь «критическое» значение $\sigma^2 \sim 1$ отвечает эквивалентной оценке случайного искажения апертуры (отличия от заданной линейной конфигурации) на величину $\sim \lambda/2\pi$, т.е. это все еще весьма малые искажения в сравнении с длиной волны, хотя эффект их влияния, как мы видим, уже весьма существенный.

Что же касается зависимости от другого параметра модели (радиуса корреляции), то его влияние также вполне ожидаемо. С ростом величины радиуса корреляции влияние фазовых флуктуаций при одной и той же дисперсии становится меньше, т.е. более коррелированные по апертуре флуктуации меньше искажают ДН. Наиболее радикальные искажения ДН отвечают ситуации малых радиусов корреляции в сравнении с длиной антенны, когда $c \ll 1$. В обратной асимптотике, когда $c \gg 1$ и флуктуации являются «дружными» по апертуре, даже в случае большой их дисперсии влияние на ДН практически невелико. Причина этого достаточно понятна – в каждый момент времени ФР является случайным, но остается практически одинаковым по всей апертуре, т.е. взаимные фазовые сдвиги, как в обратном случае относительно малых радиусов корреляции, не возникают, и антенна остается практически синфазной. Отмеченное влияние радиуса корреляции качественно иллюстрируется на рис. 16.2.

Таким образом, характерные и наиболее практически важные эффекты влияния флуктуирующего ФР антенны на ее направленные свойства заключаются в следующем. С ростом дисперсии флуктуаций и уменьшением радиуса их взаимных корреляций происходит:

- 1) быстрое исчезновение нулей ДН и рост уровня боковых лепестков, а вместе с этим – рост бокового излучения антенны;
- 2) расширение и уменьшение уровня главного лепестка, а вместе с этим – уменьшение величины КНД и разрешающей способности антенны;
- 3) рост дисперсии флуктуаций самой ДН – мгновенные реализации ДН в разные моменты времени сильнее отличаются от средней диаграммы.

Все три эффекта взаимосвязаны и указывают на то, что даже протяженная антенна, потенциально обладающая высокой направленностью и низким уровнем боковых лепестков, в условиях флуктуирующего ФР становится значительно менее выигрышной в сравнении с ненаправленным излучателем (приемником). Можно заключить, что потенциал антенны в таких условиях ее эксплуатации используется только частично, поэтому особые меры всегда предпринимаются к тому, чтобы минимизировать все возможные флуктуации и случайные ошибки АФР в самой антенне.

Если вспомнить определение эффективного размера антенны, данное в лекции 4, то в контексте анализа задач СТА мы можем дать еще одно определение такой величины. Действительно, с учетом флуктуаций АФР становится очевидным, что антенна больших

волновых размеров с присутствием флуктуаций по своим направленным свойствам (реальным значениям ШГЛ, УБЛ, максимального КНД) становится эквивалентной более короткой антенне, но с детерминированным АФР. И чем сильнее эти флуктуации, тем эффективная длина антенны в этом статистическом смысле будет только меньше. Этому качественному соображению можно придать и количественное сопровождение, построив зависимости максимального КНД или ШГЛ от длины антенны при условии флуктуаций ФР (их дисперсия будет параметром этих зависимостей) и оценив тем самым ту длину, при достижении которой дальнейший рост КНД (уменьшение ШГЛ) становится более медленным или даже прекращается. Мы этого делать не станем, однако, за недостатком времени и ограничимся только этим кратким замечанием.

В завершении отметим, что эти же качественные эффекты характерны не только для простейшей синфазной антенны с равномерным АР, но и для более сложных вариантов АФР. При сканировании ДН путем изменения угла фазировки антенны или при выборе неравномерного АР (например, с аподизацией) будут наблюдаться аналогичные статистические искажения ДН – средняя ДН будет заметно и в худшую сторону отличаться той, которая была бы у данной антенны в отсутствие флуктуаций. Основные эффекты, по сути, те же самые: сглаживание ДН в области боковых лепестков и рост УБЛ, уширение главного лепестка и уменьшение КНД.

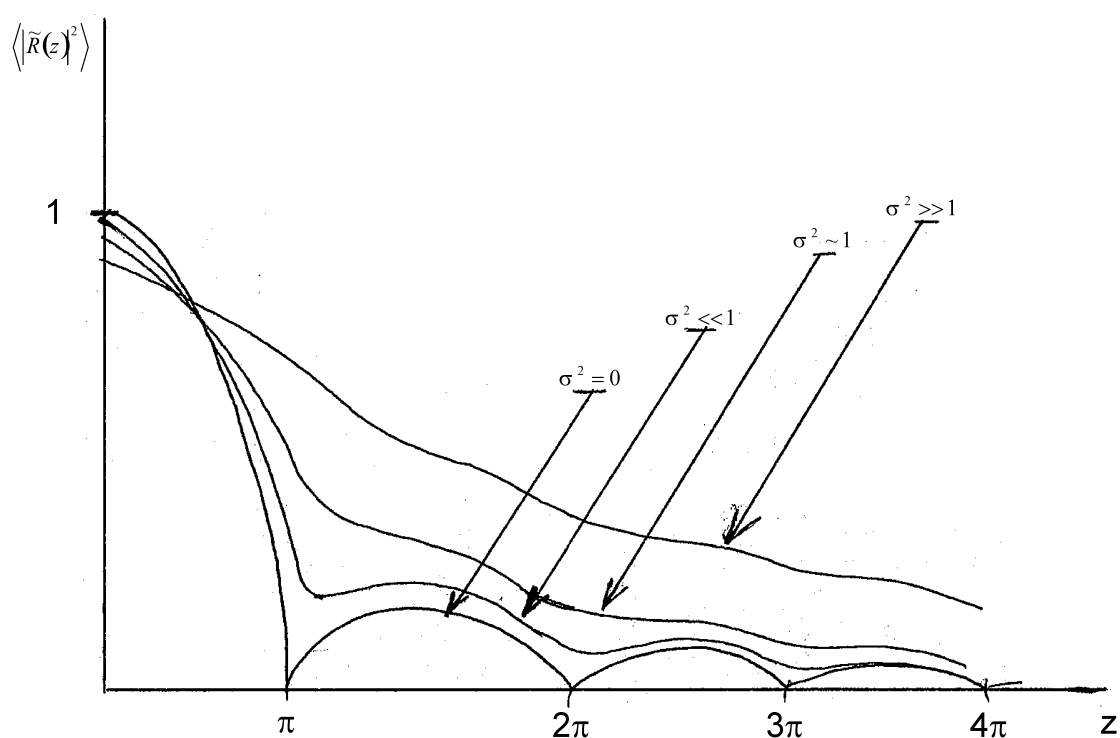


Рисунок 16.1. Средняя ДН по мощности синфазной антенны при различной величине дисперсии флуктуаций ФР (качественный рисунок, по материалам [4])

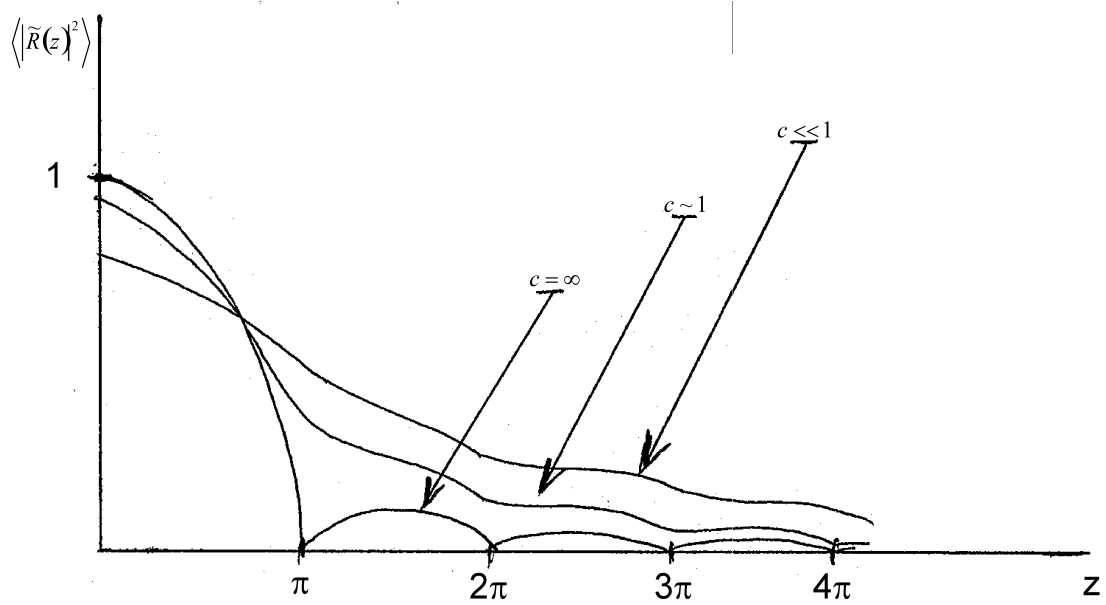


Рисунок 16.2. Средние ДН по мощности синфазной антенны при различных значениях радиуса корреляции флуктуаций ФР и величине дисперсии $\sigma^2 = 1$ (качественный рисунок, по материалам [4])

Задание студентам:

ответить качественно на следующие вопросы, которые есть вопросы «на понимание»:

- 1) почему нули ДН оказываются наиболее «чувствительными» к появлению флуктуаций ФР, в то время как главный лепесток более устойчив к флуктуациям?
- 2) при сканировании ДН фазированной антенны, в каком диапазоне углов фазировки влияние флуктуаций ФР будет более сильным – при малых углах или при больших, близких к приосевым?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ задач ТАС, рассмотренных в лекциях, сопровождался подробным введением (лекция 1) и формулировкой заключительных выводов по каждому разделу, так что нет смысла повторяться. Более важным представляется отметить, хотя бы совсем кратко, ряд близких задач, результаты решения которых широко используются в антенной технике (даже в простейшей постановке для линейной антенны), но которые не нашли отражения в лекциях за неимением достаточного времени.

Прежде всего, следует отметить круг практически важных задач по *синтезу антенн с оптимальными параметрами*. Классическая постановка одной из таких задач – синтез антенны с минимально возможным УБЛ при заданной величине ШГЛ (или в обратной формулировке – с минимальной величиной ШГЛ при заданном ограничении на УБЛ). Антенны и ДН, обладающие таким важным свойством, получили название дольф–чебышевских: американский ученый Ч. Дольф сформулировал задачу и дал ее первое решение, а математический инструмент основан здесь на методе аппроксимации функций, разработанном ранее П.Л. Чебышевым с использованием специального вида полиномов, получивших затем его имя. Отличительным свойством таких ДН является то, что все их боковые лепестки имеют равную величину, т.е. УБЛ определяется не по ближайшему к главному лепестку (как в рассмотренных нами примерах), а по всем сразу.

Важными для приложений являются также вопросы, касающиеся теории и техники *широкополосных антенных систем*. Наш анализ относился к некоторой фиксированной (хотя и произвольной) частоте, но на практике, как правило, используются антенны и возбуждающие их сигналы с конечной полосой частот. Направленные свойства антенны, как мы видели, явно зависят от частоты излучения (приема) через длину волны, поэтому ясно, что эти вопросы требуют детальной разработки. Частотные методы управления ДН и ее параметрами являются здесь одним из наиболее важных вопросов.

Наконец, обширная область ТАС связана с анализом тех же по постановкам прямых и обратных задач, но применительно к *антенным решеткам*, состоящим из определенного (как правило, весьма большого) количества элементов — излучателей или приемников. Их основное отличие от непрерывных антенн связано, очевидно, с пространственной дискретностью и появлением дополнительных пространственных масштабов – межэлементных расстояний или, по крайней мере, одного такого масштаба, если используется эквидистантная решетка. Насколько решения указанных задач окажутся близкими к тем, которые получены для непрерывных антенн, как именно ДН антенной решетки трансформируется в сравнении с ДН непрерывной антенны? Ответы на все эти вопросы качественно зависят от отношения межэлементного расстояния к длине волны, и здесь возможны различные варианты. Отметим, что антенные решетки — основной инструмент современной антенной техники, особенно в области приемных антенн с пространственной обработкой сигналов.

Рассмотрению этих и многих других актуальных вопросов ТАС посвящена обширная литература, в том числе, издания, приведенные в списке. При желании или необходимости, студенты могут начать знакомиться с ними самостоятельно, используя материал данного курса в качестве базового.

Список литературы

1. Проблемы антенной техники / Под ред. Л.Д. Бахраха, Д.И. Воскресенского. – М.: Радио и связь, 1989. – 368 с.
2. Зелкин Е.Г., Соколов В.Г. Методы синтеза антенн. – М.: Сов. радио, 1980. – 296 с.
3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
4. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. – М.: Сов. радио, 1970. – 270 с.
5. Справочник по радиолокации / Под ред. М. Скольника / Пер. с англ. под общей ред. К. Н. Трофимова. Т.2. Радиолокационные антенные комплексы. – М.: Советское радио, 1977. – 380 с.
6. Смаришев М.Д., Добровольский Ю.Ю. Гидроакустические антенны. Справочник по расчету направленных свойств гидроакустических антенн. – Л.: Судостроение. 1984. – 304 с.

Александр Игоревич Малеханов

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ АНТЕННЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.