Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
Балахнинский филиал
Кафедра прикладной информатики, информационных технологий,
радио- и электротехники

Техническая механика

Тема 2. Теоретическая механика.
Векторная статика. Теория пар. Условия равновесия.
Законы трения. Центр тяжести

Рекомендовано методической комиссией Балахнинского филиала ННГУ
студентам, обучающимся по программе бакалавриата по направлению
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Нижний Новгород
2021

УДК 531
ББК 22.21
Ш95

Ш95 Техническая механика. Тема 2. Теоретическая механика. Векторная статика. Теория пар. Условия равновесия. Законы трения. Центр тяжести. Учебно-методическое пособие в форме презентации. Составитель – Шуваев Д.Н. – Н.Новгород: ННГУ, 2021. – 49 с.

Пособие содержит методический и иллюстративный материал второй части курса «Технической механики», посвящённой вопросам векторной статики, условиям равновесия, законам трения. Настоящее пособие является естественным продолжением первой части и завершает в целом рассмотрение вопросов векторной статики.

Курс входит в обязательную часть учебного плана бакалавриата по направлению «Электроэнергетика и электротехника».

Пособие предназначено для студентов, проходящих подготовку по указанному направлению в подразделениях классического университета, а также может быть использовано студентами, аспирантами и магистрантами, занимающимися по иным направлениям подготовки.

Рецензент – д.ф.-м.н., профессор Д.Т. Чекмарёв

Рекомендовано методической комиссией Балахнинского филиала ННГУ
студентам, обучающимся по программе бакалавриата по направлению
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Предисловие

Вторая часть курса «Техническая механика», в поддержку которого разработаны настоящие учебно-методические материалы, сформирована на основе соответствующих разделов статики классического университетского курса теоретической механики. При этом курс в целом ориентирован на выполнение основных задач бакалавриата по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, включая формирование заявленных компетенций.

Изучение курса «Техническая механика» должно позволить студентам:

– систематизировать знания в этой области;

– понимать и оценивать работу реальных машин и механизмов, применяющихся в различных сферах электрорадиотехнических устройств;

– приобрести компетенции, определяющие современного специалиста.

Решая упомянутые задачи, по-видимому, можно приблизиться и к стратегической цели курса: развитию и совершенствованию как *технической*, так *и общей научной культуры* молодых специалистов.

Составитель настоящим уведомляет, что учебно-методическая разработка составлена им и используется при чтении курса лекций и проведении практических занятий.

Ни одна из частей пособия не используется автором в коммерческих целях и не может быть использована в таких целях иными лицами.

Техническая механика

I. Теоретическая механика

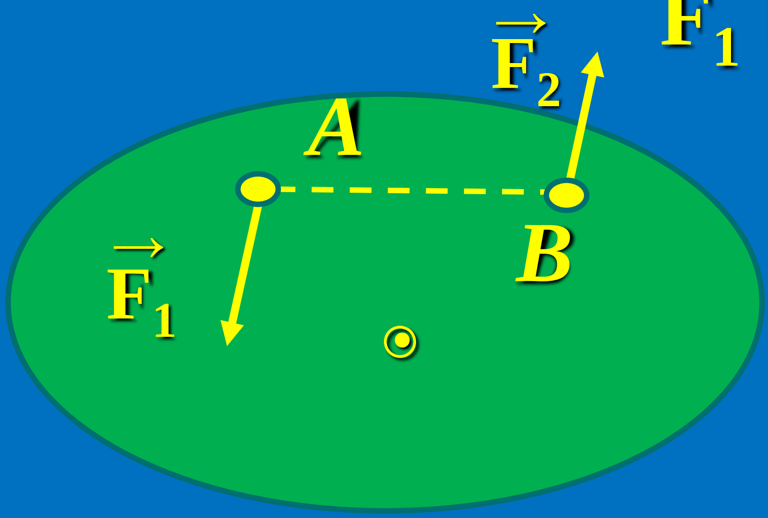
Начала векторной статики

(продолжение)

1.4 Пары силы

Параллельные силы

Пара сил: $|F_1| = |F_2|$



$\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ - антипараллельны

См. предыдущий случай:

$F = 0$

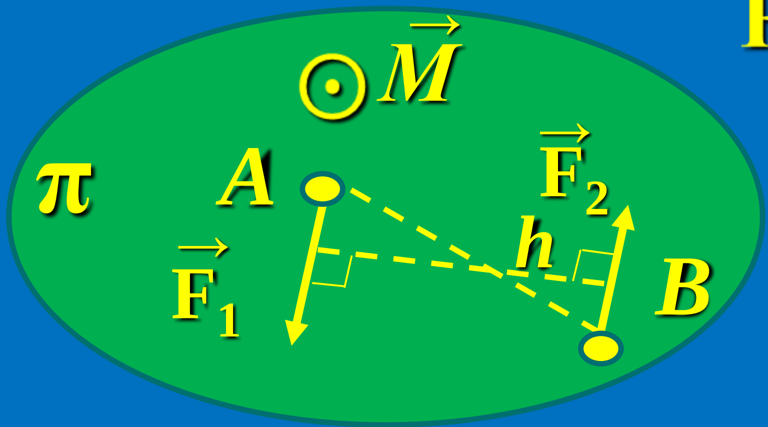
AC = BC = ∞

1) Пара сил не сводится к одной силе.
2) Пара сил не имеет равнодействующей.
3) Пара сил – самостоятельный объект статики, как и сама сила

Пара сил

Def: Пара сил: $|F_1| = |F_2| = F$

$\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ - антипараллельны



Def: плоскость пары (π)

Def: плечо пары (*h*)

Def: момент пары

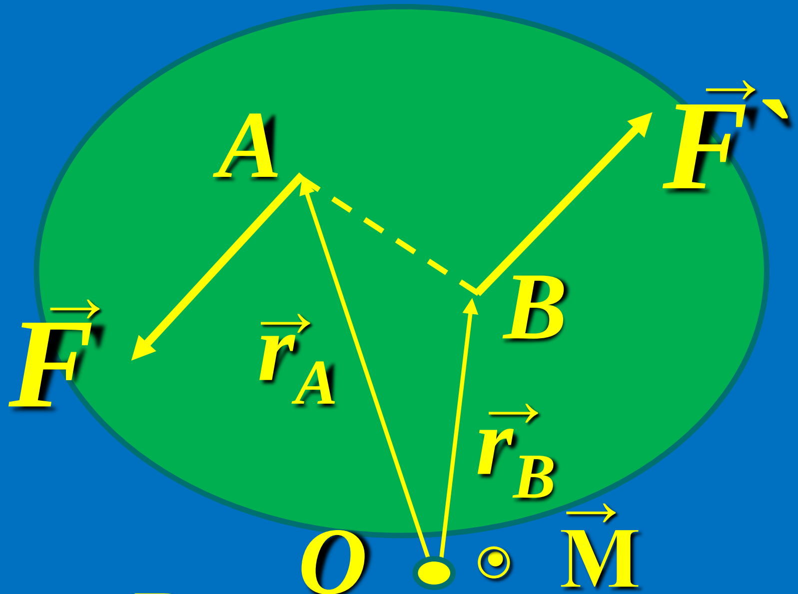
Вращательный эффект пары сил характеризуется моментом пары $M = Fh$

Момент зависит от направления сил $\rightarrow \vec{M}$

Правило правого винта: $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{BA} \times \vec{F}_1$

Одному вектору $\vec{M}$ ~ бесчисленное мн-во пар

Основная теорема теории пар



$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$
$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}`$$
$$\vec{M} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}`$$
$$\vec{M} = \vec{r}_B \times \vec{F}` - \vec{r}_A \times \vec{F}` =$$
$$= \vec{r}_B \times \vec{F}` + \vec{r}_A \times \vec{F}$$

Вектор момента пары сил – свободный.

<u>Def</u>: Две пары эквивалентны, если они имеют равные моменты (равные модули и одинаковые направления).

1. Изменение плеча пары

2. Поворот пары как целого на угол

Сложение пар

Th: Система пар сил, действующих на АТТ, эквивалентны одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов пар системы

Доказательство:

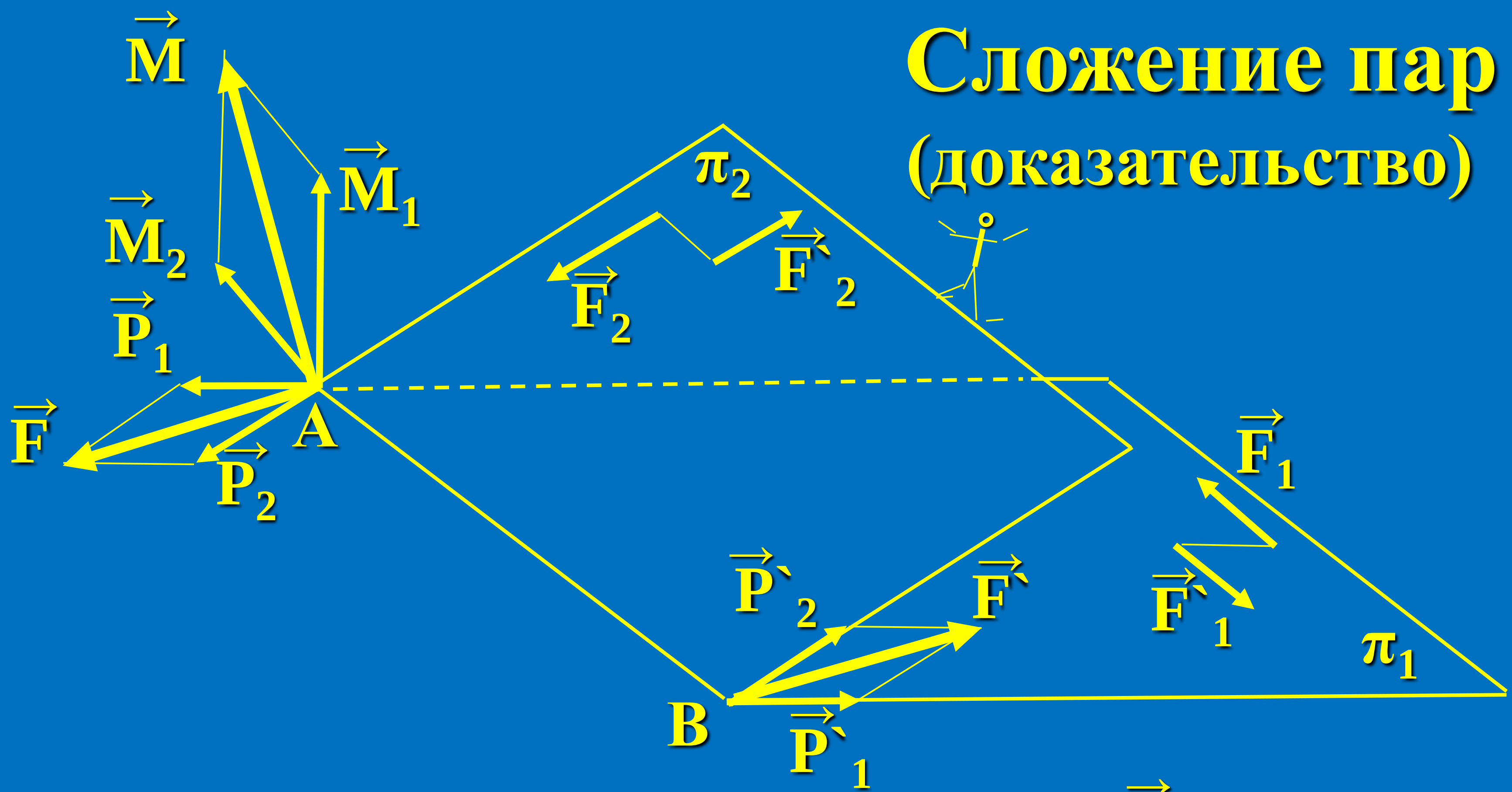
1) все пары системы привести к одному (любому) плечу,

2) совместить соответствующие точки приложения сил пары,

3) сложить все силы в каждой из двух точек

4) в силу подобия параллелограммов сил и моментов получится заявленная пара

Сложение пар
(доказательство)



mom (F_i, $F`_i$) ~ mom ($P_i$, $P`_i$) = $\vec{M}_i$

$F = P_1 + P_2$, $F` = P`_1 + P`_2$

(F, F`) – пара сил с моментом $\vec{M}$

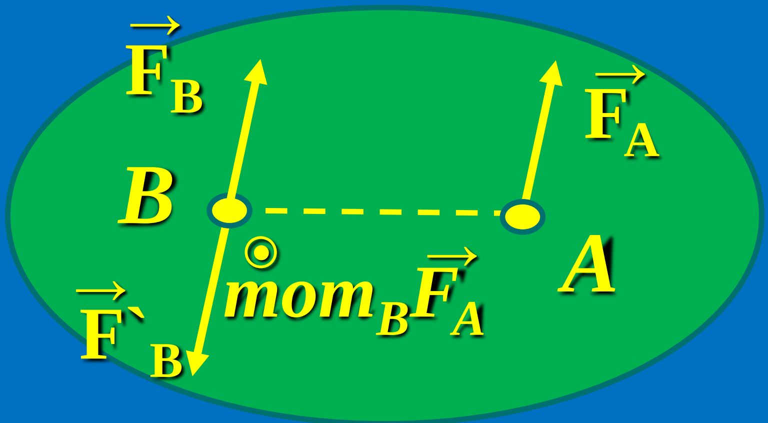
Из подобия параллелограммов:

mom (P_1, $P`_1$) + mom ($P_2$, $P`_2$) = mom (F, F`) = $\vec{M}$

Система сил, произвольно ориентированных в пространстве

Th: Основная лемма о ∥ переносе силы

$$\vec{F}_A \rightarrow \vec{F}_B?$$



$$(F_B, F`_B) \sim 0, \qquad -\vec{F}_B = \vec{F}`_B$$

$$\vec{F}_A \sim (F_A, F_B, F`_B)$$

$$\vec{F}_A \sim (F_B, (F_A, F`_B)) \sim$$

$$\sim (F_B + mom_B\vec{F}_A)$$

Всякая сила, приложенная к АТТ в точке А, эквивалентна той же силе, приложенной в точке В и паре сил, момент которой равен моменту силы, приложенной в точке А, относительно точки В

1.5 Основная теорема статики

Th: Любая система произвольно ориентированных сил эквивалентна в общем случае одной силе – *главному вектору* – и одной паре сил, момент которой – *главный момент*.

$$\vec{R}_0 = \Sigma\, \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_o = \Sigma\, (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Def: Центр приведения

Приведение системы сил к двум силам

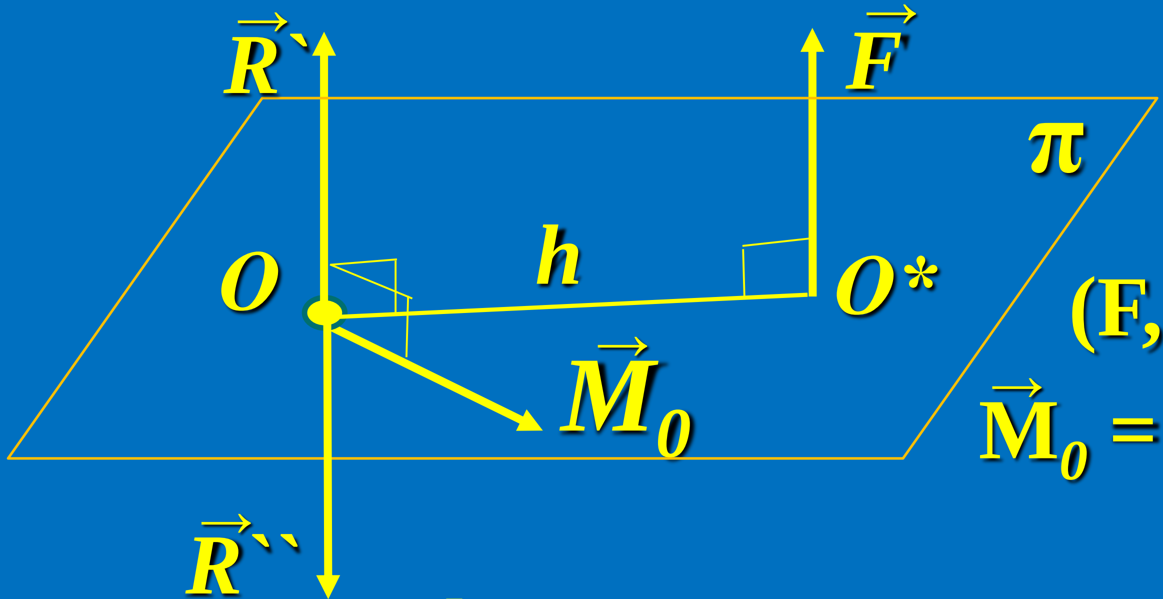
$\vec{R}_0 = \Sigma\, \vec{F}_i \qquad \vec{M}_o = \Sigma\, (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

Главный момент заменяется парой сил так, чтобы одна из сил оставалась с центре приведения. Эта сила складывается с главным вектором. В результате получаются две в общем случае неравные силы, линии действия которых скрещивающиеся прямые.

1) $R_0 = 0 \rightarrow M_o \sim$ паре сил

2) $M_0 = 0 \rightarrow R_o = F$ – равнодействующая

Теорема Вариньона



$\vec{F}$ из O* в O:

$|\vec{F}| = |\vec{R}`| = |\vec{R}``|$

$(F, R``) \sim mom_o\vec{F} = \vec{M}_0$

$\vec{M}_0 = \Sigma\, mom_0\vec{F}_i$ (по def)

Th: Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно произвольного центра равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра

1.6 Необходимые и достаточные условия равновесия

произвольной пространственной системы сил

Условия равновесия

произвольной пространственной системы сил

$$\vec{R}_0 = \Sigma\, \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_0 = \Sigma\, mom_o\vec{F}_i = 0$$

$$\vec{V}_i\,|_{t=0} = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma\, F_{ix} = 0 \\ \Sigma\, F_{iy} = 0 \\ \Sigma\, F_{iz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma\, mom_x F_i = 0 \\ \Sigma\, mom_y F_i = 0 \\ \Sigma\, mom_z F_i = 0 \end{cases}$$

Необходимые и достаточные условия

Равновесие плоской системы сил

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$

Все силы лежат в плоскости *Oxy*:

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} = 0 \\ \Sigma F_{iy} = 0 \\ \Sigma\, mom_z F_i = 0 \end{cases}$$

Th: Теорема о трёх моментах (плоская система)

$$\Sigma \vec{M}_{Az} = 0, \quad \Sigma \vec{M}_{Bz} = 0, \quad \Sigma \vec{M}_{Cz} = 0$$

Необходимость очевидна. Достаточность:

$$\Sigma \vec{M}_{Az} = 0 \rightarrow 1)\ \vec{R}_0 = \vec{F} \neq 0,\ 2)\ \vec{R}_0 = 0$$

То же в точках B и C. Равнодействующая должна проходить через точки A, B и C, что невозможно

Равновесие системы ∥ сил

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$

Все силы ∥ оси *Oz*:

$$\begin{cases} \Sigma F_{iz} = 0 \\ \Sigma\, mom_x F_i = 0 \\ \Sigma\, mom_y F_i = 0 \end{cases}$$

Для плоской системы все силы ∥ оси Oy:

$$\begin{cases} \Sigma F_{iy} = 0 \\ \Sigma\, mom_o F_i = 0 \end{cases}$$

Равновесие несвободного тела

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$

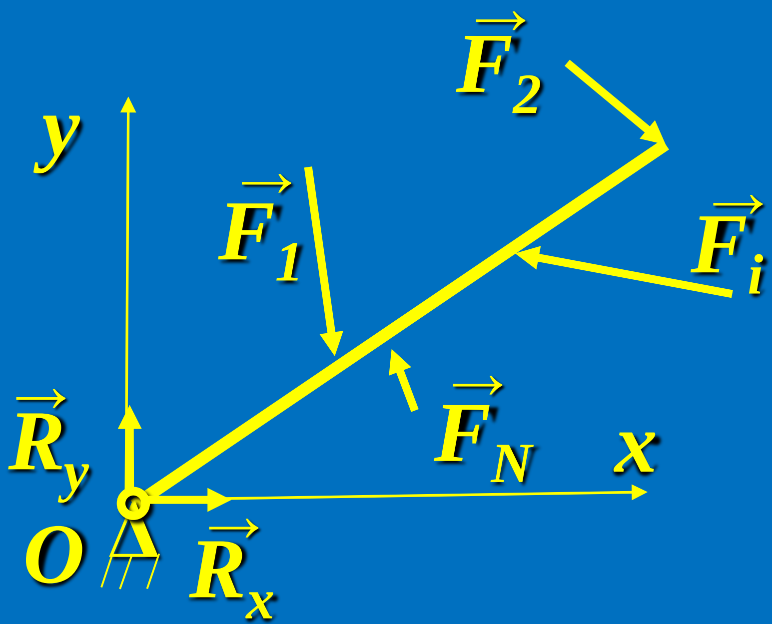
$$\begin{cases} \Sigma\, F_{ix} + \Sigma\, R_{ix} = 0 \\ \Sigma\, F_{iy} + \Sigma\, R_{iy} = 0 \\ \Sigma\, F_{iz} + \Sigma\, R_{iz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma\, mom_x F_i + \Sigma\, mom_x R_i = 0 \\ \Sigma\, mom_y F_i + \Sigma\, mom_y R_i = 0 \\ \Sigma\, mom_z F_i + \Sigma\, mom_z R_i = 0 \end{cases}$$

<u>**Но максимум 6 неизвестных!**</u>

Равновесие рычага

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$

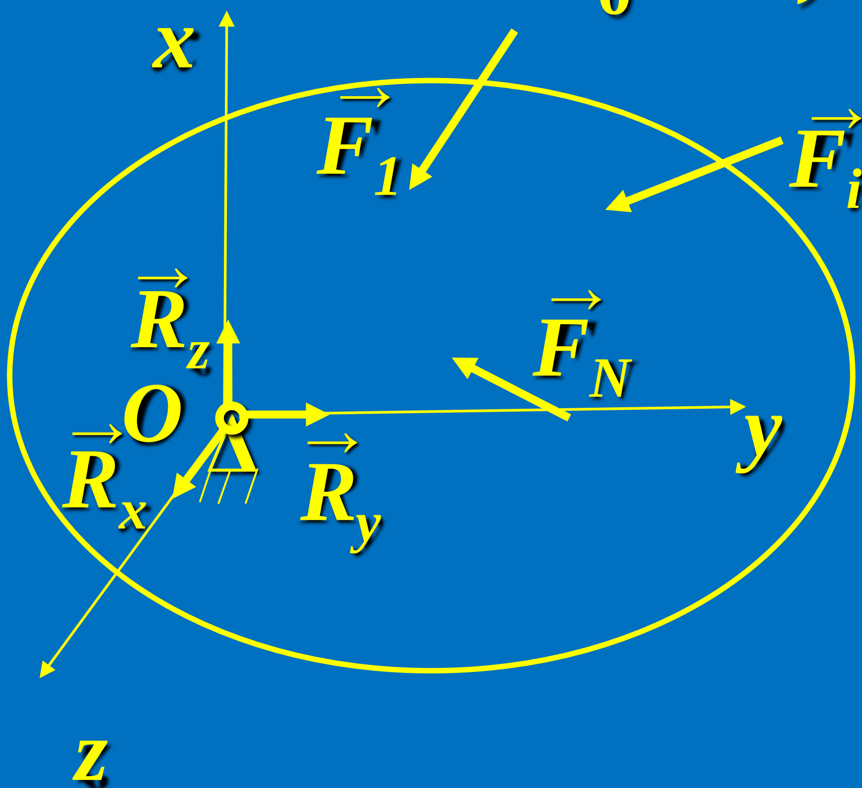


$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} + R_x = 0 \\ \Sigma F_{iy} + R_y = 0 \\ \Sigma\, mom_o F_i = 0 \end{cases}$$

Уравнения и условие равновесия

Равновесие АТТ, имеющего одну неподвижную точку

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$



$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} + R_x = 0 \\ \Sigma F_{iy} + R_y = 0 \\ \Sigma F_{iz} + R_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma\, mom_x F_i = 0 \\ \Sigma\, mom_y F_i = 0 \\ \Sigma\, mom_z F_i = 0 \end{cases}$$

Уравнения и условия равновесия

Равновесие несвободного тела

$$\vec{R}_0 = 0, \quad \vec{M}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma F_{ix} + R_x = 0 \\ \Sigma F_{iy} + R_y = 0 \\ \Sigma F_{iz} + R_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma\, mom_x F_i + mom_x R = 0 \\ \Sigma\, mom_y F_i + mom_y R = 0 \\ \Sigma\, mom_z F_i + mom_z R = 0 \end{cases}$$

Но максимум 6 неизвестных!

$$\vec{V}_i \big|_{t=0} = 0 \;!!!$$

Задача о равновесии несвободного тела (М. 8.16)

P, R_A, R_B - ?

$\vec{R}_0 = 0, \vec{M}_0 = 0$

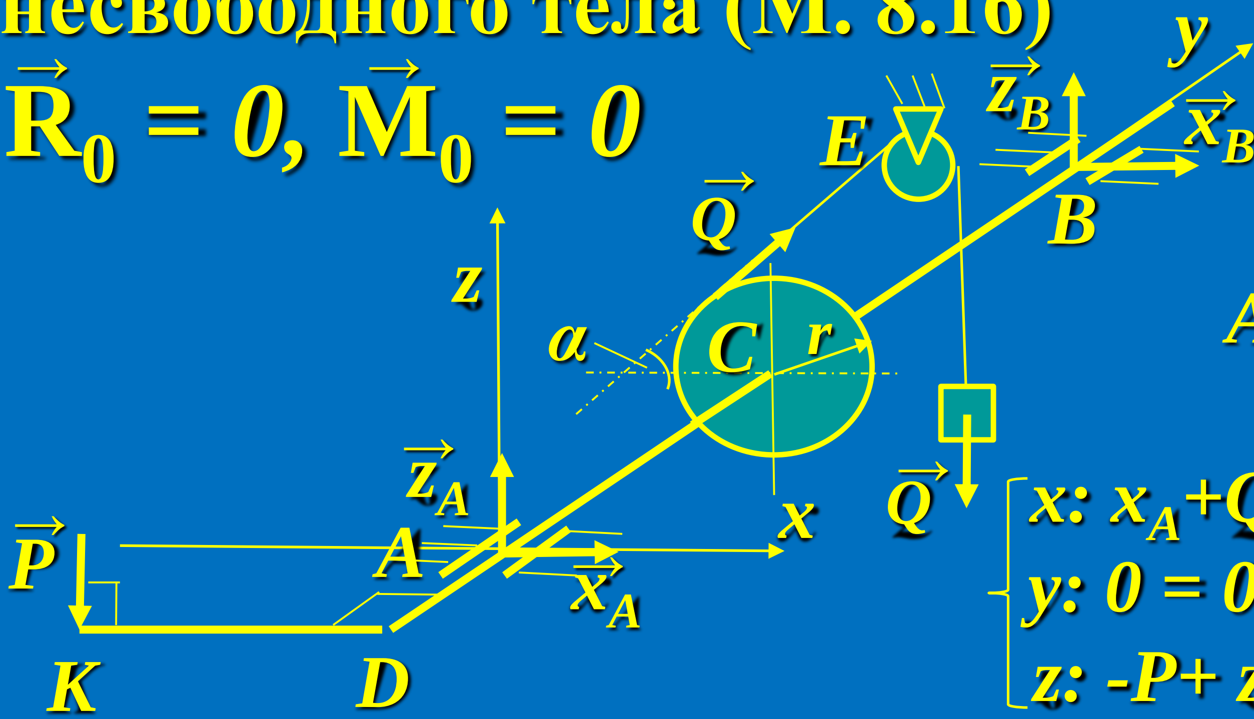
$Q = 1$ кН

$r = 5$ см

$KD=40, AD=30,$

$AC=40, CB=60$ см

$\alpha = 60^0$



$$\begin{cases} x: x_A + Q\cos\alpha + x_B = 0 & (1) \\ y: 0 = 0 & (2) \\ z: -P + z_A + Q\sin\alpha + z_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mom_x: P \cdot AD + Q\sin\alpha \cdot AC + z_B \cdot (AC+CB) = 0 & (4) \\ mom_y: -P \cdot KD + Q \cdot r = 0 & (5) \\ mom_z: -Q\cos\alpha \cdot AC - x_B \cdot (AC + CB) = 0 & (6) \end{cases}$$

Последовательность дальнейшего решения:

(5): P (4): z_B (6): x_B (1): x_A (3): z_A

1.7 Законы трения

Трение скольжения

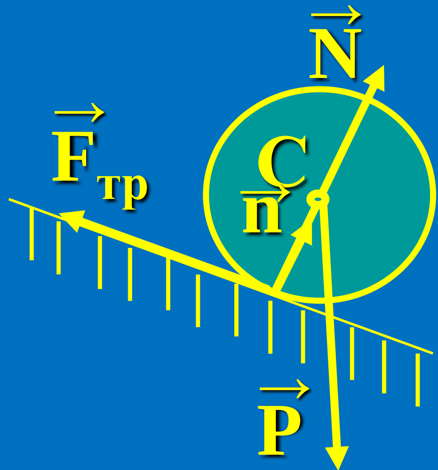
Трение качения

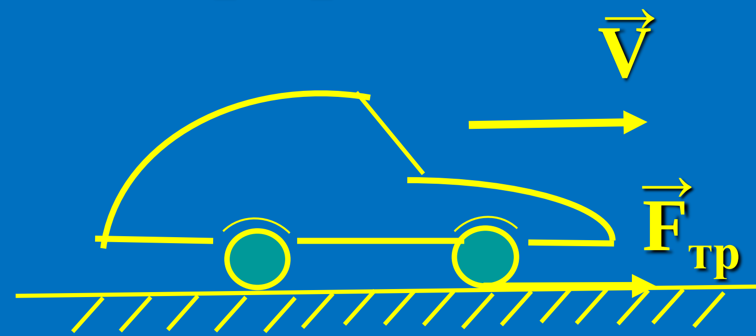
Трение верчения

1.7.1 Трение скольжения

Трение и связи с трением

Трение = природа





Def: Идеальная связь – связь без трения

<u>Закон трения Кулона (статика)</u>

$F_{тр} \leq F_{тр\ max}$, $F_{тр\ max}$ – максимально достижимая в статике

$F_{тр\ max} = f_0 N$, f_0 – коэфф. трения скольжения покоя

$F \neq F(S)$, S – площадь контакта тел

Шарль Огюстен де Кулон

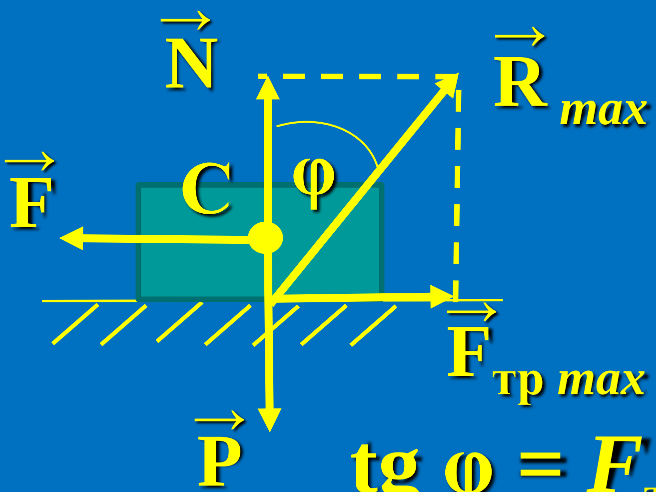
1736-1806

Закон трения Кулона в динамике

$F_{тр} = f \cdot N,$

f – динамический коэффициент трения скольжения

Реакция связи с трением



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$$

$$F_{тр} \leq F_{тр\,max}$$

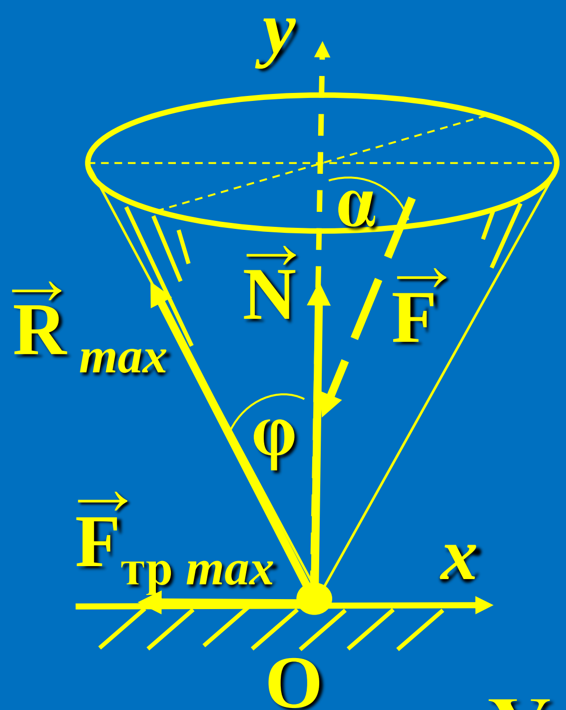
$$\vec{R}_{max} = \vec{N} + \vec{F}_{тр\,max}$$

$\mathrm{tg}\,\varphi = F_{тр\,max}/N = f_0$, φ – угол трения

Конус трения

При $f_0 = const$ – круговой конус

$\vec{F}$ – равнодействующая *активных сил*



Условия равновесия

$$\begin{cases} F_{тр} - F\sin\alpha = 0 \\ N - F\cos\alpha = 0 \\ F_{тр} \le f_0 N = F_{тр\ max} \end{cases}$$

Откуда: $F_{тр} = F\sin\alpha, \quad N = F\cos\alpha$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = F_{тр}/N \le f_0$$

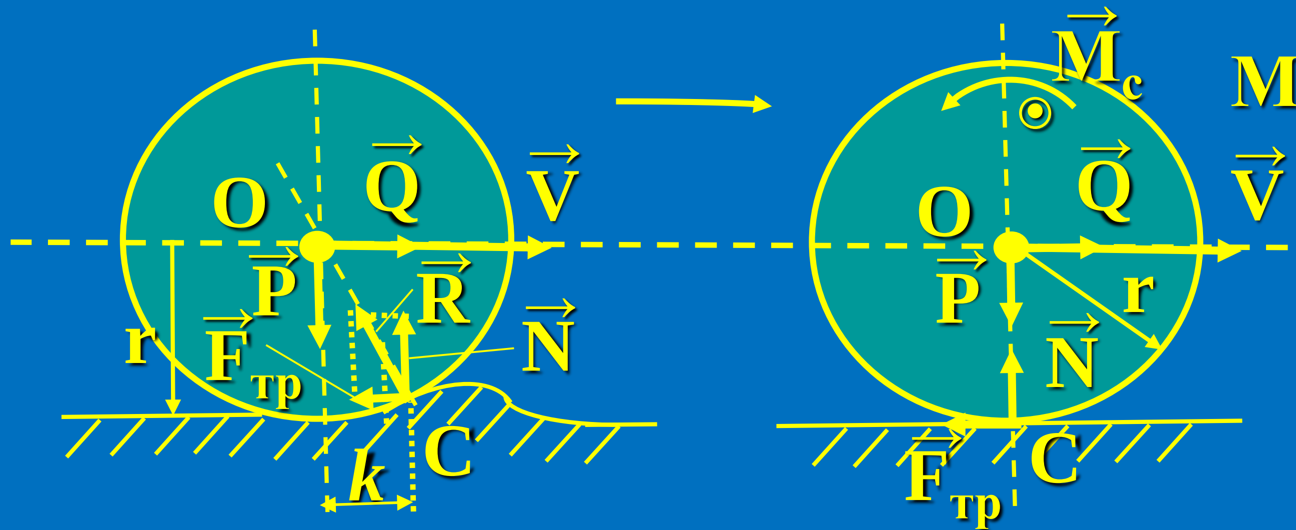
$$\mathrm{tg}\,\alpha \le \mathrm{tg}\,\varphi$$

<u>Условие покоя</u>: $\alpha \le \varphi$,

т.е. до тех пор, пока $\vec{F}$ внутри конуса трения

1.7.2 Трение качения

Трение качения



$M_c = kN$

Деформируемое твёрдое тело   Абсолютно твёрдое тело

Предельное равновесие: $Pk = Q_{пр}r$, $Q_{пр}/P = k/r$

- $(F_{тр}, Q)$ – пара, обеспечивающая качение,
- (P, N) – пара сопротивления качению.

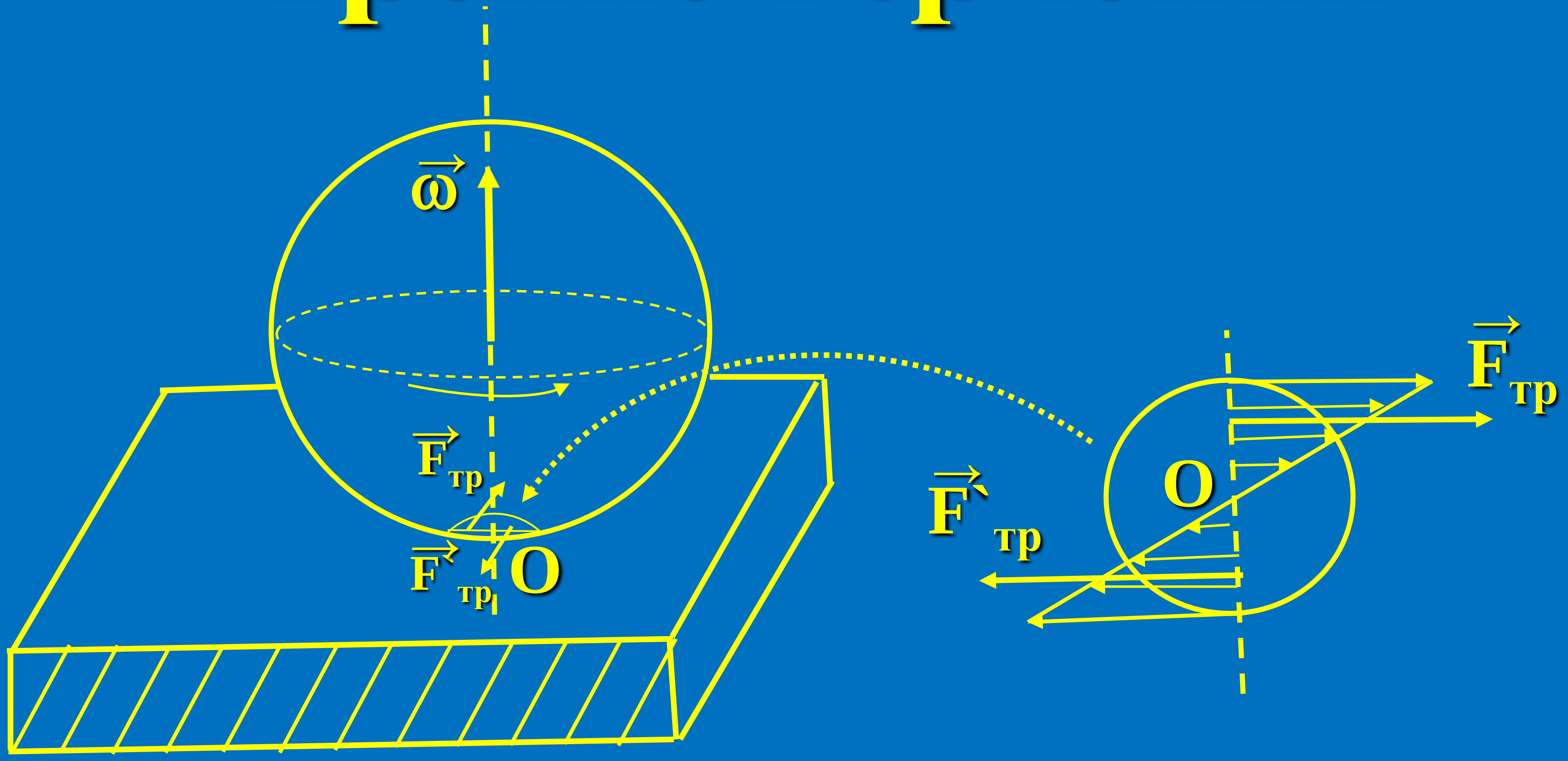
$Q_{пр} = P \cdot k/r$, $Q \le Q_{пр}$ – покой, $Q > Q_{пр}$ – качение

$[k]$ = *см*, $k/r \ll f$

$$\boxed{M_c = kN}$$

1.7.3 Трение верчения

Трение верчения

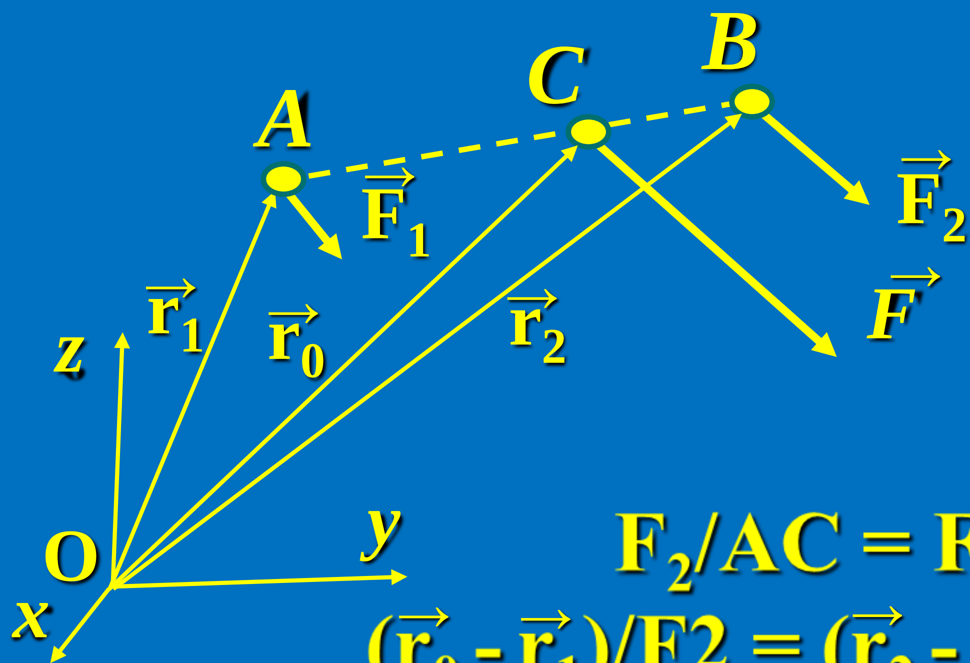


$$M^c = f \cdot N$$

1.8 Центр тяжести

Параллельные силы

Система нескольких параллельных сил



(F_1, F_2)

$\vec{r}_1 + \vec{AC} = \vec{r}_0$

$\vec{r}_0 + \vec{CB} = \vec{r}_2$

$\vec{AC} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$

$\vec{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$

$F_2/AC = F_1/CB, \quad \vec{AC}/F_2 = \vec{CB}/F_1$

$(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)/F2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)/F1$

$$\vec{r}_0 = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$$

$$x_0 = \frac{F_1x_1 + F_2x_2}{F_1 + F_2}; \quad y_0 = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2}; \quad z_0 = \frac{F_1z_1 + F_2z_2}{F_1 + F_2}$$

Параллельные силы

Система N параллельных сил

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$$

$\vec{r}_0$ – определяет *центр параллельных сил* ЦПС

1) ЦПС не зависит от направления ∥ сил.
2) система антипараллельных сил сводится к двум антипараллельным силам, а те – либо к равнодействующей, либо к паре сил.
3) ЦПС тяжести частиц АТТ = *центр тяжести*

Центр тяжести

Центр параллельных сил тяжести

$$\vec{r}_0^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k \vec{r}_k}{\sum_{r=1}^{n} \Delta P_k}$$

Удельный вес конечного малого элемента

$$\gamma_k = \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}$$

Удельный вес в точке

$$\gamma(x, y, z) = lim_{\Delta V_k \to 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}$$

Если $\gamma = const,$ то $\gamma \cdot V = P$

Центр тяжести

$$\vec{r}_c = \lim_{n\to\infty} \vec{r}_c^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k \vec{r}_k}{\sum_{r=1}^{n} \Delta P_k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k \vec{r}_k}{\sum_{r=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k \vec{r}_k\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k\right)}$$

$$P = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n} \gamma_k \Delta V_k\right)$$

Центр тяжести

$$\vec{r}_c = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\gamma_k \Delta V_k \vec{r}_k\right)}{P}$$

$$= \frac{1}{P}\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\vec{r}\,dxdydz$$

$$x_c = \frac{1}{P}\iiint\limits_V x\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\gamma = const, \qquad x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,dxdydz$$

Центр тяжести однородной оболочки

$$\gamma` = \Delta P_k / \Delta S_k$$

При $\gamma` = const$

$$\vec{r}_c = 1/S \iint\limits_{(S)} \vec{r}\, ds$$

$$\begin{cases} x_c = 1/S \iint\limits_{(S)} x\, ds \\ y_c = 1/S \iint\limits_{(S)} y\, ds \\ z_c = 1/S \iint\limits_{(S)} z\, ds \end{cases}$$

Центр тяжести однородной линии

$$\gamma`` = \Delta P_k / \Delta L_k$$

При $\gamma`` = const$

$$\vec{r}_c = 1/L \int\limits_{(L)} \vec{r}\, dl$$

$$\begin{cases} x_c = 1/L \int\limits_{(L)} x\, ds \\ y_c = 1/L \int\limits_{(L)} y\, ds \\ z_c = 1/L \int\limits_{(L)} z\, ds \end{cases}$$

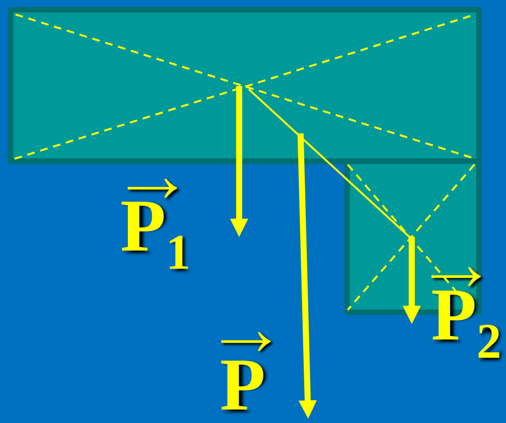
Нахождение центров тяжести

Способы определения ЦТ

1. <u>Использование геометрической и физической симметрии</u>

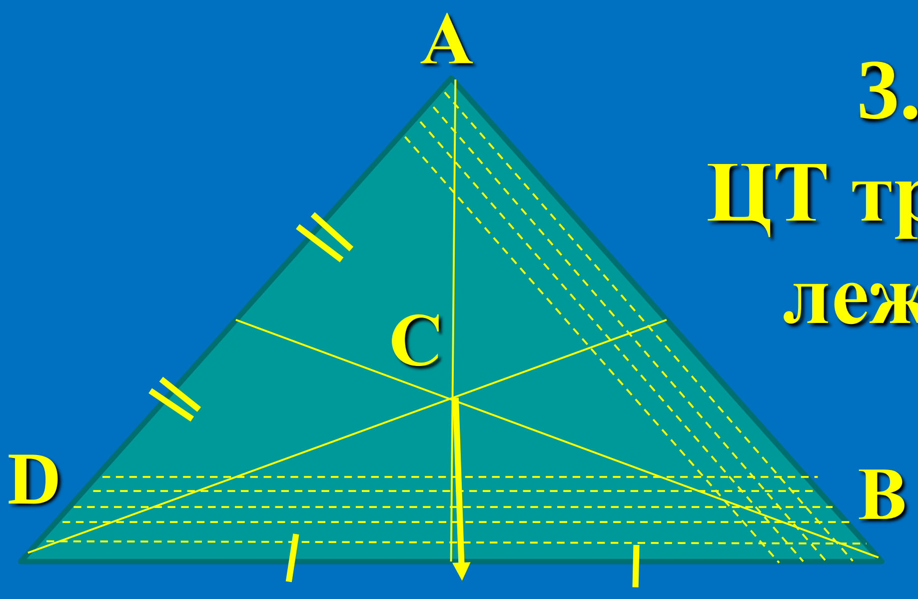
ЦТ отрезка, круга, кольца, квадрата, прямоугольника, ромба, шара, кругового цилиндра, параллелепипеда и т.д.

2. <u>Метод разбиения на простые части</u>



$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

Нахождение центров тяжести

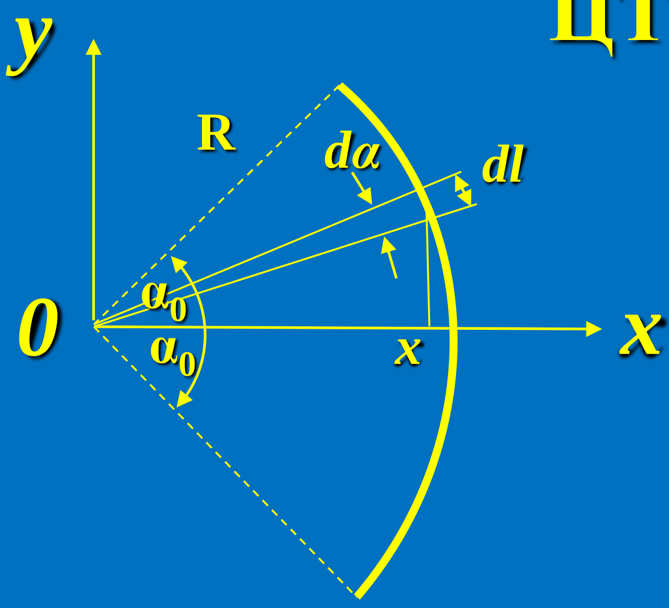


3. <u>Метод Архимеда</u>

ЦТ треугольной пластины лежит на пересечении медиан

Античные «атомы» в математике (геометрии)

Нахождение центров тяжести



4. <u>По определению</u>

ЦТ части дуги окружности

Из симметрии: $y_c = 0$

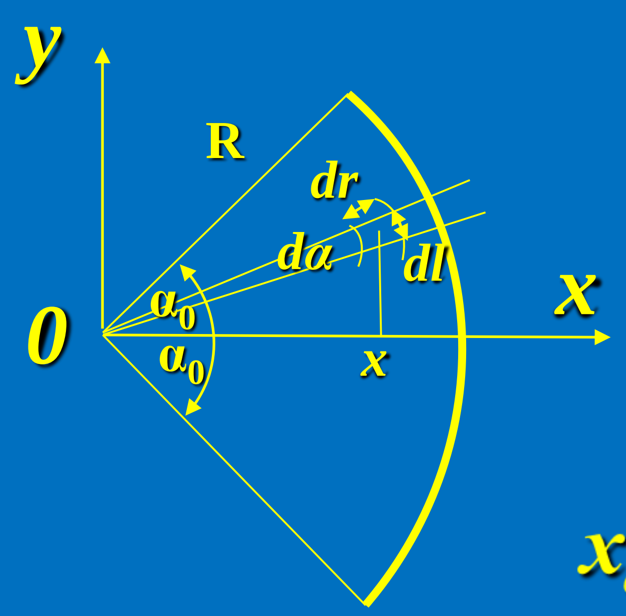
$$L = 2R\alpha_0$$

$$x = R \cdot \cos\alpha$$

$$dl = R \cdot d\alpha$$

$$x_c = 1/L \int_L x \cdot dl = 1/(2R \cdot \alpha_0) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} R^2 \cos\alpha \, d\alpha = \sin\alpha_0 \cdot R/\alpha_0$$

Нахождение центров тяжести



3. <u>По определению</u>

ЦТ сектора круга

Из симметрии: $y_c = 0$

$$S = \pi R^2 2\alpha_0 / 2\pi = \alpha_0 R^2$$

$$x = r\cdot\cos\alpha, \quad dl = r\cdot d\alpha$$

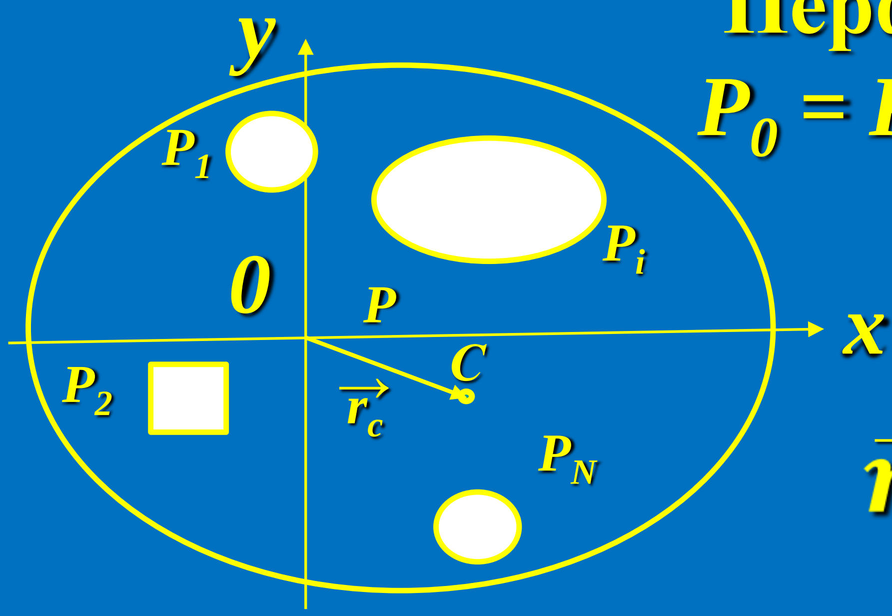
$$x_c = 1/(\alpha_0 R^2) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \int_0^R r^2 \cos\alpha \cdot dr\, d\alpha =$$

$$= R^3/(3R^2\cdot\alpha_0)\ (\sin\alpha_0 - \sin(-\alpha_0)) = 2R\sin\alpha_0/(3\alpha_0)$$

Нахождение центров тяжести

5. Метод «отрицательных» весов

Перфорированная пластина



$P_0 = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_i + \ldots + P_N$

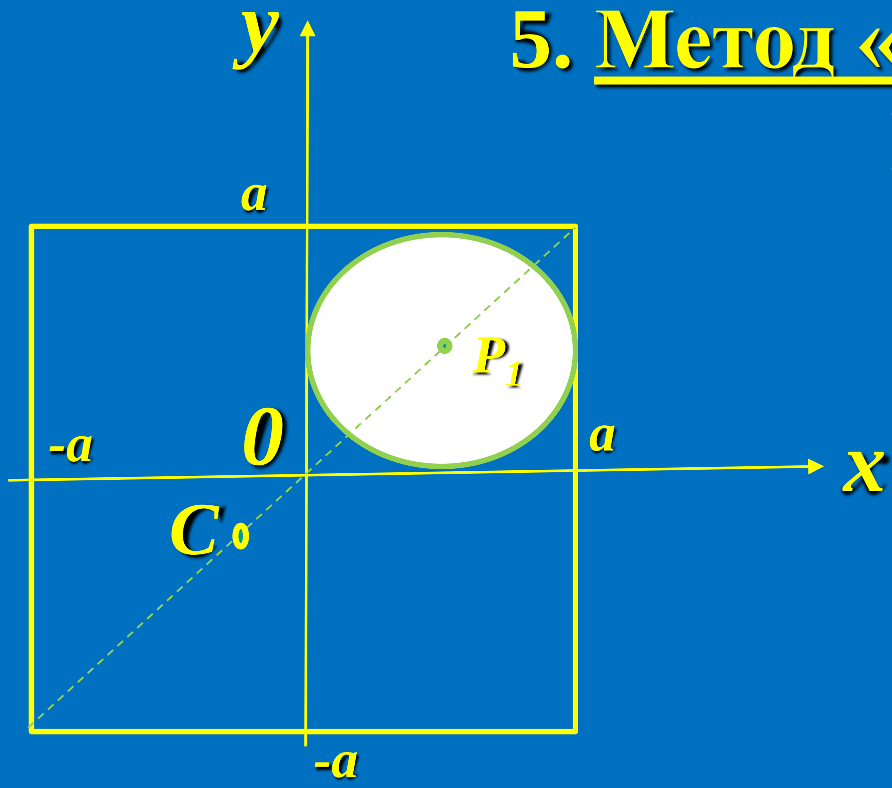
P – реальный вес

P_i – «веса» пустот

$$\vec{r}_0 = \frac{P\vec{r}_c + P_1\vec{r}_1 + \ldots + P_N\vec{r}_N}{P_0}$$

$$\vec{r}_c = \frac{P_0\vec{r}_0 - P_1\vec{r}_1 - \ldots - P_N\vec{r}_N}{P}$$

Нахождение центров тяжести



5. Метод «отрицательных» весов

Из симметрии: $y_c = x_c$

R = a/2, γ` – уд. вес

$P_0\,(0,\ 0)$

$P_1\,(a/2,\ a/2)$

$P\,(x_c,\ y_c)$ - ?

$$x_c = \gamma`(4a^2 \cdot 0 - \pi(0{,}5a)^2 \cdot 0{,}5a)/((4a^2 - \pi(0{,}5a)^2)\gamma`)$$

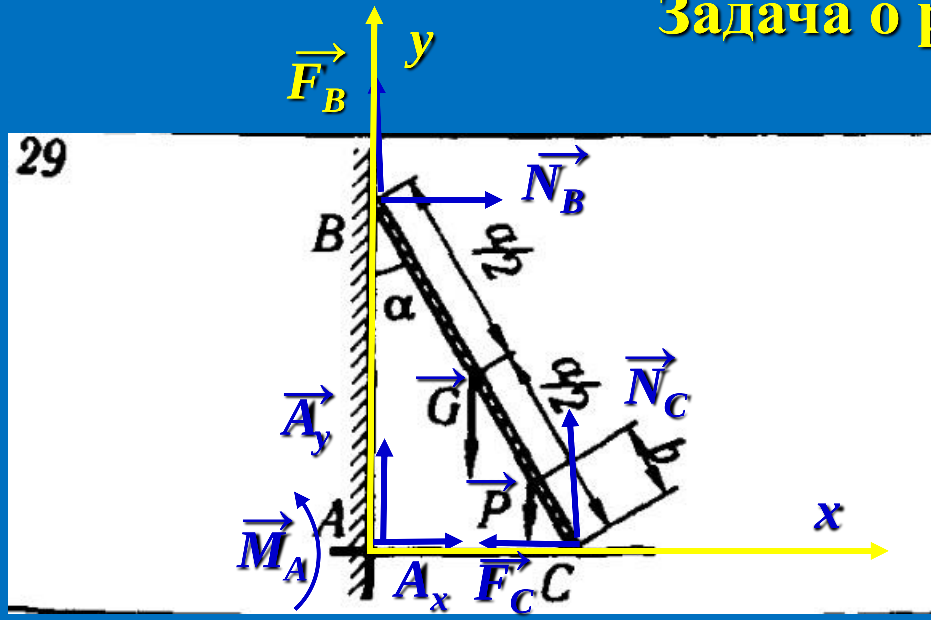
$$x_c = -0{,}125\pi a/(4 - 0{,}25\pi)$$

$$y_c = x_c$$

Пример

Задача о равновесии с учётом трения

Яблонский, с-5, № 29



$$\vec{R}_0 = 0,\ \vec{M}_0 = 0$$

Плоская система ВС:

$$Ax:\ N_B - F_C = 0$$

$$Ay:\ F_B - G - P + N_C = 0$$

$$mom_C:$$

$$-N_B a.\cos\alpha - F_B a.\sin\alpha + G.0,5a\sin\alpha + Pb\sin\alpha = 0$$

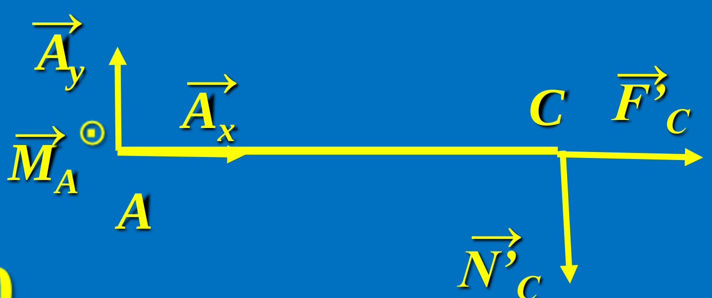
$$F_B = f_0 N_B, \qquad F_C = f_0 N_C, \qquad \mathrm{P}_{\min} = f_0 N_B - G + N_C$$

Равновесие консоли АС:

$$Ax:\ A_x + F'_C = 0$$

$$Ay:\ A_y - N'_C = 0$$

$$mom_A:\ -N'_C a.\sin\alpha + M_A = 0$$



Техническая механика

Тема 2. Теоретическая механика.
Векторная статика. Теория пар. Условия равновесия.
Законы трения. Центр тяжести.

Учебно-методическое пособие
в форме презентации

Нижний Новгород
2021