МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

А.А. Федюков

Дифференциальные уравнения первого порядка

Практикум

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2021

УДК 517.9
ББК 22.161
Ф-16

Ф-16 Федюков А.А. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА: практикум. – [электронный ресурс]. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 49 с.

Рецензент: старший преподаватель **Р.С. Бирюков**

В практикуме изложен теоретический материал по решению дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрены примеры решения уравнений с разделяющимися переменными, решение однородных и линейных уравнений первого порядка, решение задачи Коши. В каждом разделе поставлена задача и разобраны примеры с подробным алгоритмом решения. Приведены вопросы для самопроверки, задания для самостоятельной работы и задания для тестового контроля, которые позволяют закрепить полученные теоретические знания.

Практикум предназначен для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК 517.9
ББК 22.161

А.А. Федюков

Содержание

Введение

Высшая математика отличатся от ранее созданных математических наук, изучаемых в средней школе: арифметики, геометрии, алгебры и тригонометрии, которые обычно объединяют под общим названием *элементарной математики*. Основное отличие высшей математики от элементарной заключается в следующем: элементарная математика изучает неизменяемые, постоянные величины – числа и фигуры. Высшая же математика изучает переменные величины и создает аппарат, предназначенный для изучения переменных процессов. Учебно-методическая разработка посвящена важному разделу дисциплины «**Высшая математика**» – дифференциальным уравнениям первого порядка.

Учебно-методическая разработка (практикум) «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» предназначена для бакалавров 1 курса института ИТММ ННГУ, обучающихся по направлению подготовки **09.03.04** «**Программная инженерия**». В практикум включен материал, изучаемый во втором семестре в теме «**Дифференциальные уравнения**» дисциплины «**Высшая математика**». Ниже приведены ключевые компетенции, на формирование которых направлен материал, изложенный в практикуме и требования к знаниям и умениям студентов, необходимые при изучении данного материала.

Ключевые компетенции, которые формируются у студентов при изучении материала изложенного в практикуме «Дифференциальные уравнения первого порядка».

Учебно-методическая разработка направлена на формирование следующих общекультурной и общепрофессиональной компетенций:

- способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (**УК-1**);
- способность применять естественнонаучные и общеинженерные

знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (**ОПК-1**).

Требования к знаниям и умениям студентов, которые необходимы в соответствии с требованиями рабочей программой дисциплины «Высшая математика» при изучении темы «Дифференциальные уравнения».

Знать:

- принципы сбора, отбора и обобщения информации **З1(УК-1)**;
- основы математики, физики, вычислительной техники и программирования **З1(ОПК-1)**;

Уметь:

- соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности **У1(УК-1)**;
- решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования **У1(ОПК-1);**

Владеть:

- практическим опытом работы с информационными источниками, опытом научного поиска, создания научных текстов **В1(УК-1)**;
- навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности **В1(ОПК-1).**

Структура практикума «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» соответствует последовательности изложения материала в учебной программе дисциплины «**Высшая математика**». Он разбит на разделы. В первом разделе сформулированы основные понятия и определения. Во втором разделе рассмотрено решений дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Третий раздел посвящен решению однородных уравнений и дифференциальных уравнений указанного вида, которые приводятся заменой к однородному уравнению. В четвертом разделе рассмотрены алгоритмы решения линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрены алгоритмы решения дифференциальных уравнений Бернулли и Риккати. В каждом разделе изложен теоретический материал, который позволяет обучающимся систематизировать знания основных понятий, теорем и методов их практического применения при подготовке к контрольным работам и экзаменам; рассмотрены основные типы задач, разобраны примеры. Практикум содержит комплект заданий, который может быть использован в качестве типового для выработки навыков решения задач. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной работы студентов.

В пятом разделе учебно-методической разработки «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» приведены контрольные вопросы для самопроверки, которые помогают закрепить полученные теоретические знания.

Приведенный в практикуме тест тематического контроля позволяет оценить, на сколько сформированы у обучающихся универсальная (**УК-1**) и общепрофессиональная (**ОПК-1**) компетенции. В учебно-методической разработке «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» приведены тестовые задания двух вариантов. Тест состоит из частей *A, B, C и D* и состоит из 16 заданий в каждом варианте как открытого так и закрытого типа. Задания части *A* – это закрытые тестовые задания множественного выбора одного правильного ответа из предложенных. Содержательная часть тестового задания сформулирована в виде незаконченного предложения, которое становится истинным, если выбран верный вариант ответа, или ложным, если выбраны неверные варианты. Задания части *B* – это закрытые тестовые задания множественного выбора двух правильных ответов из предложенных. Часть C состоит из трех открытых тестовых заданий дополнения в виде незаконченных предложений и предложений с пропущенным словом, двух открытых тестовых заданий на установление соответствия и одного открытого тестового задания на установление аналогии. Задания части D – это открытые тестовые задания свободного изложения. В тесте приведены правильные ответы. В конце теста приведена шкала оценивания результатов теста.

В конце практикума приведен список литературы, рекомендованный при изучении данной темы дисциплины «**Высшая математика**».

Учебно-методическая разработка может быть полезна преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам очной формы обучения.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимые переменные, искомую функцию, ее производные или дифференциалы.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Символически обыкновенное дифференциальное уравнение записывается как:

$$F(x, y, y') = 0,\ F(x, y, y', y'') = 0,\ F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной (или дифференциала) неизвестной функции, входящей в это уравнение.

Например, функция $y = \ln x$ является решением дифференциального уравнения первого порядка

$$x \cdot y' - 1 = 0. \tag{1}$$

Действительно, т.к. $y'(x) = \dfrac{1}{x}$ то, подставляя производную в уравнение (1), получим тождество.

Интегрированием дифференциального уравнения называется процесс нахождения решения дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется функция вида

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

в которую входит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, каков порядок уравнения.

Видно, что функции $y = \ln x + 1$, $y = \ln x + 5$ также являются решениями дифференциального уравнения (1). Общее решение в данном примере имеет вид

$$y = \ln x + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего решения при различных значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находим при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Например, для случая $y(1) = 2$ частное решение дифференциального уравнения (1) будет иметь вид $y = \ln x + 2$. Его график приведен на Рис. 1.

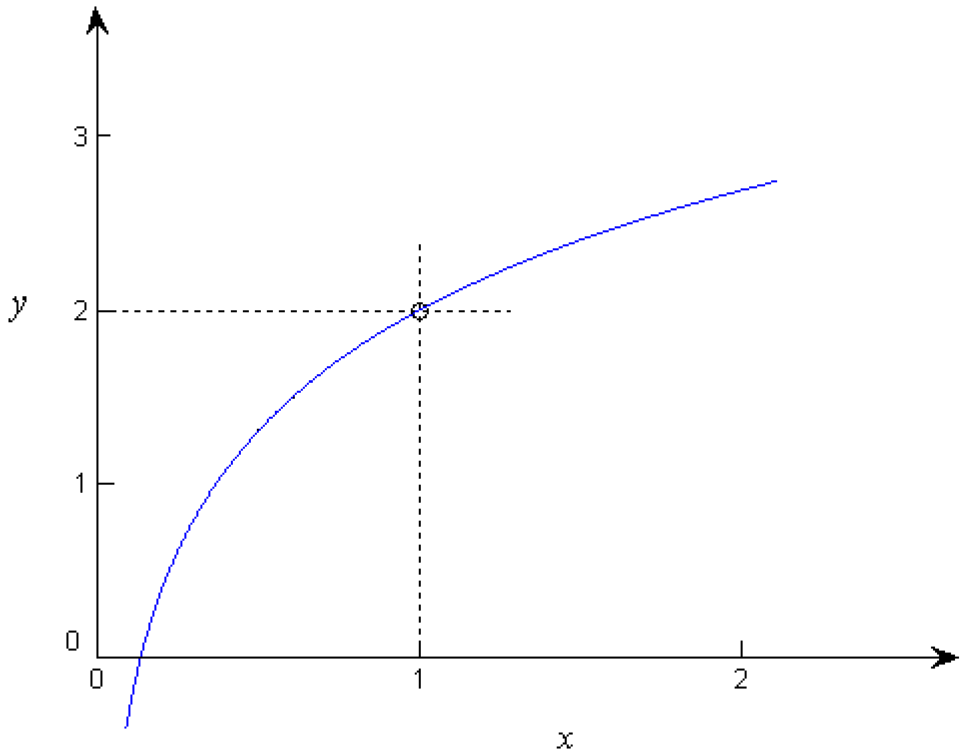

Рис. 1. График интегральной кривой

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически это значит, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0, y_0) координатной плоскости OXY.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Обыкновенные дифференциальные *уравнения с разделяющимися переменными* – это дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

или в виде

$$M(x) \cdot N(y)dx + P(x) \cdot Q(y)dy = 0.$$

Алгоритм решения таких уравнений состоит в следующем.

Рассмотрим первое уравнение. Разделим уравнение на выражение $g(y)$. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Проинтегрируем левую и правую часть равенства. Имеем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Вычислив интегралы, получим решение исходного дифференциального уравнения.

Рассмотрим второе уравнение. Разделим обе части уравнения на выражение $N(y) \cdot P(x)$. Получим уравнение

$$\frac{Q(y)}{N(y)}dy = \frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Проинтегрируем левую и правую часть равенства. Имеем

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = \int \frac{M(x)}{P(x)}dx.$$

Вычислив интегралы, получим решение исходного дифференциального уравнения.

Замечание. При делении на выражения $g(y)$ или $N(y) \cdot P(x)$, мы могли потерять решения, обращающие эти выражения в нуль. В связи с этим нужно проверить, не является ли $g(y)=0$ решением для первого уравнения, а $N(y)\cdot=0$ или $P(x)=0$ решениями для второго уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2y^2y'+1=y. \qquad (2)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Представим уравнение (2) в виде

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1.$$

Разделим обе части уравнения на выражение $x^2(y-1)$. Получим

$$\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{1}{x^2}dx.$$

Заметим, что

$$\frac{y^2}{y-1}=\frac{y^2-1+1}{y-1}=\frac{(y-1)(y+1)}{y-1}+\frac{1}{y-1}=y+1+\frac{1}{y-1}.$$

Следовательно

$$\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=\frac{1}{x^2}dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства. Имеем

$$\int y+1+\frac{1}{y-1}dy=\int\frac{1}{x^2}dx.$$

Так как справедлива формула

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C_1,$$

а

$$\int\frac{1}{y-1}dy=\ln|y-1|+C_2,$$

где C_1, C_2, n – константы; $n\neq-1$ получим

$$\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C,$$

где C – константа.

Так как при делении на выражение $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ или $y=1$, то нужно сделать проверку. Подставляя в уравнение (2) убеждаемся, что $y=1$ – решение уравнения (2), а $x=0$ – не является решением дифференциального уравнения.

Ответ. $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C$, где C – константа; $y=1$.

Уравнение вида $y'=f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ (или заменой $z=ax+by+c$, где c – любое число).

Пример 2. Решить уравнение

$$y'=\cos(y-x)\,. \tag{3}$$

Приведем уравнение (3) к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого представим его в виде

$$dy=\cos(y-x)dx\,. \tag{4}$$

Сделаем замену $t=y-x$. Тогда $dt=dy-dx$. Значит $dy=dt+dx$. Подставив последнее равенство в уравнение (4) получим

$$dt+dx=\cos t\ dx\,.$$

Сгруппируем элементы.

$$dt=\cos t\ dx-dx\,,$$

$$dt=(\cos t-1)dx\,. \tag{5}$$

Разделим обе части уравнения (5) на выражение $\cos t-1$. Получим

$$\frac{1}{\cos t-1}dt=dx\,. \tag{6}$$

Так как справедлива формула понижения степени

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x\,,$$

то

$$\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x.$$

Следовательно

$$\cos t - 1 = -2\sin^2 \frac{t}{2}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$-\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Имеем

$$-\int \frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \int dx.$$

Так как справедлива формула

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1,$$

а

$$\int \frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} dt = -\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} d\left(\frac{t}{2}\right) = -ctg\frac{t}{2} + C_2,$$

где C_1, C_2, n – константы; $n \neq -1$ получим

$$ctg\frac{y-x}{2} = x + C,$$

где C – константа.

Заметим, что при делении на выражение $\sin(y-x)$ могли быть потеряны решения $\sin(y-x) = 0$, то есть решения $y - x = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$. Проверкой убеждаемся, что они являются решением исходного дифференциального уравнения (3).

Ответ. $ctg\frac{y-x}{2} = x + C$, где C – константа; $y - x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$z' = 10^{x+z}. \tag{7}$$

Представим дифференциальное уравнение (7) в виде

$$\frac{dz}{dx} = 10^{x+z}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его как

$$dz = 10^{x+z}\,dx.$$

Следовательно

$$10^{-z}\,dz = 10^{x}\,dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Имеем

$$\int 10^{-z}\,dz = \int 10^{x}\,dx.$$

Так как справедлива формула

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \bar{C},$$

где $\bar{C}$, a – константы; $a > 0$, $a \neq 1$, то, интегрируя, получим что

$$-\frac{10^{-z}}{\ln 10} = \frac{10^{x}}{\ln 10} + C_1.$$

Тогда

$$10^{-z} + 10^{x} = C.$$

где $C = -\ln 10 \cdot C_1$. Значит

$$10^{-z} = C - 10^{x}.$$

Логарифмируя обе части данного равенства и, применяя формулу $\log a^b = b\ \log a$, приходим к равенству

$$z = -\lg(C - 10^{x}),$$

где C – константа.

Ответ. $z = -\lg(C - 10^{x})$, где C – константа.

Пример 4. Решить задачу Коши

$$(x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1. \qquad (8)$$

Приведем дифференциальное уравнение (8) к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого сделаем замену

$$t = x + 2y. \qquad (9)$$

Тогда т.к. $t'_x = 1 + 2y'_x$, то

$$y' = \frac{t'-1}{2}. \qquad (10)$$

Подставим значения (9), (10) в уравнение (8). Получим уравнение

$$t \cdot \frac{t'-1}{2} = 1.$$

Следовательно

$$t \cdot \frac{dt}{dx} = t + 2. \qquad (11)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поделим обе части уравнения (11) на выражение $t+2$. Имеем

$$\frac{t}{t+2}dt = dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Так как справедлива формула

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \bar{C}_1,$$

а

$$\int \frac{t}{t+2}dt = \int (1 - \frac{2}{t+2})dt = t - 2\ln\left| t+2 \right| + \bar{C}_2,$$

где $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, n – константы; $n \neq -1$, то

$$t - 2\ln\left| t+2 \right| = x + C_1.$$

Согласно замене (9) $t = x + 2y$. Поэтому

$$x + 2y - 2\ln\left| x + 2y + 2 \right| = x + C_1,$$

$$\ln\left| x+2y+2 \right| = y + C_2,$$

где $C_2 = -\dfrac{C_1}{2}$.

Следовательно

$$x+2y+2 = Ce^{y}, \tag{12}$$

где C – константа.

Так как мы делили на выражение $t+2$, то могли потерять решение. Проверкой убеждаемся, что $t=-2$ является решением дифференциального уравнения (11). Согласно замене (9) $t = x+2y$. Поэтому

$$x+2y+2=0 \tag{13}$$

является решением исходного дифференциального уравнения (8).

Заметим, что решение (13) включено в решение (12) при $C=0$.

Теперь решим задачу Коши. Подставим $y(0)=-1$ в уравнение (12).

Имеем

$$0-2+2=Ce^{-1}.$$

Следовательно $C=0$.

Ответ. Решение задачи Коши: $x+2y+2=0$.

3. Однородные уравнения

Функция $M(x,y)$ называется *однородной функцией* степени n, если всех чисел $k>0$ справедливо равенство $M(kx,ky)=k^n M(x,y)$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ или } M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (14)$$

называются *однородными дифференциальными уравнениями*. Здесь $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени. Чтобы решить однородное уравнение (14) нужно сделать замену $y=t\cdot x$. После этого получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5. Решить уравнение

$$xdy=(x+y)dx. \qquad (15)$$

Это однородное дифференциальное уравнение. Сделаем замену $y=t\cdot x$. Тогда так как

$$dy=xdt+tdx,$$

уравнение (15) примет вид:

$$x(xdt+tdx)=(x+tx)dx.$$

Разделим обе части полученного уравнения на x. Раскрывая скобки, получим

$$xdt=dx.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его. Запишем уравнение в виде

$$dt=\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую часть данного равенства. Получим

$$\int dt = \int \frac{dx}{x}.$$

Следовательно

$$t = \ln|x| + C.$$

Так как согласно замене $t = \frac{y}{x}$, то

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C,$$

где C – константа.

Заметим, что при делении на x мы могли потерять решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x = 0$ является решением дифференциального уравнения (15).

Ответ. $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$, где C – константа; $x = 0$.

Пример 6. Решить уравнение

$$y^2 + x^2 y' = xyy'. \tag{16}$$

Это однородное дифференциальное уравнение. Сделаем замену $y = x \cdot t$. Тогда так как

$$y'_x = x\ t'_x + t,$$

исходное уравнение (16) примет вид

$$x^2 t^2 + x^2 (xt' + t) = t\ x^2 (xt' + t),$$

$$x^2 (xt' + t) = tx^3 t'.$$

Раскрывая скобки, получим

$$x^3 t' + x^2 t = tx^3 t'.$$

Следовательно

$$xt' + t = xtt',$$

$$x(t-1)t' = t.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его решение. Разделим обе части уравнения на выражение $x \cdot t$. Получим

$$\frac{(t-1)}{t}dt = \frac{1}{x}dx,$$

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{x}dx.$$

Проинтегрируем левую и правую часть полученного равенства. Получим

$$\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \int\frac{1}{x}\,dx.$$

Следовательно

$$t - \ln|t| = \ln|x| + \ln|\bar{C}|,$$

где $\bar{C}$ – константа. Применяя формулу $\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$, приходим к равенству

$$t = \ln|\bar{C}xt|,$$

Согласно замене $t = \dfrac{y}{x}$, поэтому

$$\ln|\bar{C}y| = \frac{y}{x}.$$

Следовательно

$$y = Ce^{\frac{y}{x}},$$

где C – константа.

При делении на выражение $x \cdot t$ могли быть потеряны решения $x = 0$, $y = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = 0$ не является решением уравнения (16); $y = 0$ присутствует в полученном выше решении при $C = 0$.

Ответ. $y = Ce^{\frac{y}{x}}$, где C – константа.

Некоторые уравнения вида (14) заменой $y = z^m$ можно привести к однородному уравнению. Число m заранее не известно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. Требуя, чтобы уравнение (14) было однородным, найдем число m, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то исходное уравнение не приводится к однородному уравнению этим способом.

Пример 7. Решить уравнение

$$2x^2 y' = y^3 + xy. \tag{17}$$

Приведем уравнение (17) к однородному уравнению. Сделаем замену $y = z^n$. Т.к. $y'_x = nz^{n-1} z'_x$, уравнение (17) примет вид:

$$2x^2 nz^{n-1} z'_x = z^{3n} + xz^n,$$

$$2x^2 nz^{n-1} dz - (z^{3n} + xz^n)dx = 0 \tag{18}$$

Следовательно, условие для однородности дифференциального уравнения (18) имеет вид:

$$n + 1 = 3n = n + 1.$$

Равенства удовлетворяются одновременно, если

$$n = \frac{1}{2}.$$

Для случая $y \geq 0$ сделаем замену $y = \sqrt{z}$. При такой замене уравнение (18) примет вид

$$x^2 dz - (z + x)zdx = 0.$$

Замена $z = x \cdot u(x)$ преобразует последнее уравнение в уравнение с разделяющимися переменными. В самом деле, т.к. $dz = udx + xdu$

$$x^2(udx + xdu) - (xu + x)xudx = 0,$$

$$udx + xdu - (u + 1)udx = 0,$$

$$xdu - u^2 dx = 0 \tag{19}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Представим уравнение (19) в виде

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Получим

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C,$$

где C - константа. Согласно замене $u = \frac{z}{x}$, поэтому

$$-\frac{x}{z} = \ln|x| + C.$$

Так как согласно замене в свою очередь $z = y^2$, то получим, что

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C, \qquad (20)$$

где C - константа

В процессе решения мы делили на x. Значит, могли потерять решение. При $x = 0$ значение $z = 0$. Следовательно, $y = 0$. Проверкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением дифференциального уравнения (17).

В случае $y \le 0$ заменой $y = -\sqrt{z}$ приходим к тому же результату.

Ответ. $\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C$, где C - константа; $y = 0$.

4. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – непрерывные функции.

Если функция $b(x) = 0$, то тогда уравнение называют *линейным однородным дифференциальным уравнением*. В случае если $b(x) \neq 0$ уравнение называют *линейным неоднородным дифференциальным уравнением*.

В общем случае линейное неоднородное дифференциальное уравнение может быть решено *методом вариации произвольной постоянной* (методом Лагранжа). Алгоритм нахождения решения методом Лагранжа состоит в следующем:

Шаг 1. Полагаем $b(x) = 0$ и находим общее решение линейного однородного уравнения

$$y' + a(x)y = 0.$$

Заметим, что это уравнение является уравнением с разделяющимися переменами. Решая уравнение, получим

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx,$$

$$\ln|y| + \ln|C| = -\int a(x)dx,$$

$$y_{одн} = Ce^{-\int a(x)dx},$$

где C – константа.

Шаг 2. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде общего решения однородного уравнения, считая, что произвольная постоянная C является функцией независимой переменной x, т.е.

$$y_{общ} = C(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Вычислим производную y', используя формулу для вычисления производной сложной функции

$$y' = C'(x)e^{-\int a(x)dx} - a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Подставляя функции y и y' в уравнение $y' + a(x)y = b(x)$, получим

$$C'(x)e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x),$$

$$C'(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x).$$

Получили условие на $C(x)$. Решив уравнение, находим функцию $C(x)$ и подставляем ее в $y_{общ} = C(x)e^{-\int a(x)dx}$. Получим общее решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 8. Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4. \tag{21}$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. В соответствии с первым шагом алгоритма найдем решение однородного уравнения

$$xy' - 2y = 0.$$

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то

$$x\frac{dy}{dx} = 2y,$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Получим

$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|,$$

где C - константа.

Так как справедливо равенство $2\ln|x| = \ln|x|^2$, то решение однородного уравнения имеет вид

$$y = Cx^2, \tag{22}$$

где C - константа.

Решим неоднородное уравнение (21). Согласно второму шагу алгоритма, сделаем замену $C = C(x)$. Тогда

$$y'_x = C'_x x^2 + 2xC. \tag{23}$$

Подставим значение (23) в уравнение (21). Получим

$$x\left(C'x^2 + 2xC\right) - 2y = 2x^4,$$

$$x^3 C' = 2x^4,$$

$$C' = 2x.$$

Таким образом

$$C(x) = x^2 + C_1,$$

где C_1 - константа.

Подставим выражение $C(x)$ в (22). Получим общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения (21)

$$y = x^4 + C_1 x^2,$$

где C_1 - константа.

Ответ. $y = x^4 + C_1 x^2$, где C_1 - константа.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^2 y' + xy + 1 = 0. \tag{24}$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. В соответствии с первым шагом алгоритма найдем решение однородного уравнения

$$x^2 y' + xy = 0,$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Имеем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Следовательно

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (25)$$

где C – константа. Решим неоднородное уравнение (24). Согласно второму шагу алгоритма, сделаем замену $C = C(x)$. Тогда

$$y'_x = \frac{C'_x x - C}{x^2}. \qquad (26)$$

Подставим значения (25) и (26) в уравнение (24). Получим

$$x^2 \frac{C'x - C}{x^2} + x\frac{C}{x} + 1 = 0,$$

$$C'x - C + C + 1 = 0,$$

$$C'x + 1 = 0,$$

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{x},$$

$$dC = -\frac{1}{x}dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Имеем

$$\int dC = -\int \frac{dx}{x},$$

$$C(x) = -\ln|x| + C_1,$$

где C_1 - константа. Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (24) имеет вид

$$y=\frac{-\ln|x|+C_1}{x}\text{, где } C_1 \text{ - константа.}$$

Ответ. $y=\dfrac{-\ln|x|+C_1}{x}$, где C_1 - константа.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'+a(x)y=b(x)y^n,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – заданные непрерывные функции; $n\in R$, $n\neq 0$, $n\neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Для решения уравнения Бернулли нужно разделить обе части уравнения на выражение y^n и сделать замену $z=\dfrac{1}{y^{n-1}}$. После замены получим линейное дифференциальное уравнение.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'+a(x)y+b(x)y^2=C(x),$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $C(x)$ – заданные непрерывные функции, называется *уравнением Риккати*. В общем виде уравнение Риккати не решается. Если известно частное решение $y_1(x)$, тогда заменой $y=y_1(x)+z$ данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению Бернулли.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (т.е. члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y'+y^2=x^2-2x$ в левой части будут члены, подобные членам в правой части, если взять $y=ax+b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b, в случае, если частное решение указанного вида существует, что не всегда бывает. Другой пример. Для уравнения $y'+2y^2=\dfrac{6}{x^2}$ те же рассуждения побуждают нас искать решение в виде $y=\dfrac{a}{x}$. Подставляя $y=\dfrac{a}{x}$ в уравнение, найдем постоянную a.

Пример 10. Решить уравнение

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4. \tag{27}$$

Это уравнение Риккати. Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = ax^m.$$

Подставив в (27) получим:

$$ax^2 \cdot mx^{m-1} + x \cdot ax^m + x^2 \cdot a^2x^{2m} = 4. \tag{28}$$

В равенстве (28) степени у величины x в выражениях слева и справа должны совпадать. Следовательно

$$m + 1 = 0,$$

$$m = -1. \tag{29}$$

Подставим значение (29) в (28). Получим

$$-a + a + a^2 = 4.$$

Следовательно

$$a = -2 \text{ или } a = 2.$$

Значит, частное решение дифференциального уравнения (27) имеет вид $y = \dfrac{2}{x}$. Сделаем замену

$$y = z + \frac{2}{x}. \tag{30}$$

Найдем производную

$$y'_x = z'_x - \frac{2}{x^2}. \tag{31}$$

и подставим значения (30) и (31) в уравнение (27). Получим дифференциальное уравнение

$$x^2\left(z' - \frac{2}{x^2}\right) + x\left(z + \frac{2}{x}\right) + x^2\left(z + \frac{2}{x}\right)^2 = 4.$$

Раскроем скобки и упростим его

$$x^2z' - 2 + xz + 2 + x^2\left(z^2 + \frac{4z}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 4,$$

$$x^2z' + xz + x^2z^2 + 4xz = 0,$$

$$x^2z' + 5xz + x^2z^2 = 0.$$

Получили уравнение Бернулли. Решим его. Разделим обе части уравнения на выражение xz^2. Получим

$$\frac{x}{z^2}z' + \frac{5}{z} + x = 0. \qquad (32)$$

Сделаем замену $t = \frac{1}{z}$. Значит

$$z = \frac{1}{t} \qquad (33)$$

Тогда $t'_x = -\frac{1}{z^2}z'_x$. Следовательно

$$z' = -z^2t'. \qquad (34)$$

Подставим значения (33) и (34) в уравнение (32). Имеем

$$-xt' + 5t + x = 0. \qquad (35)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Для нахождения его решения, в соответствии с первым шагом алгоритма, сначала решаем однородное уравнение

$$xt' = 5t. \qquad (36)$$

$$x\frac{dt}{dx} = 5t,$$

$$\frac{dt}{t} = \frac{5}{x}dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Получим

$$\int\frac{dt}{t} = 5\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|t| = 5\ln|x| + \ln|C|,$$

где C - константа.

Таким образом, решение однородного уравнения (36) имеет вид

$$t = Cx^5, \qquad (37)$$

где C - константа. Решим неоднородное уравнение (34). В соответствии со вторым шагом алгоритма сделаем замену $C = C(x)$. Тогда

$$t'_x = C'_x x^5 + 5Cx^4. \tag{38}$$

Подставим значения (37) и (38) в уравнение (35)

$$-x\left(C'x^5 + 5Cx^4\right) + 5Cx^5 + x = 0,$$

$$-C'x^6 + x = 0,$$

$$C' = \frac{1}{x^5},$$

$$C' = \frac{1}{x^5}.$$

Следовательно

$$C(x) = -\frac{1}{4}x^{-4} + C_1, \tag{39}$$

где C_1 - константа. Подставим значение (39) в (37). Получим решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (35)

$$t = -\frac{1}{4}x + C_1 x^5.$$

Так как справедливо равенство (33), то

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{4}x + C_1 x^5. \tag{40}$$

Из равенства (30) следует, что

$$z = y - \frac{2}{x}. \tag{41}$$

Подставляя значение (41) в (40) получим

$$\frac{1}{y - \frac{2}{x}} = -\frac{1}{4}x + C_1 x^5,$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{4}x + C_1 x^5},$$

или

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{C_2 x^5 - x},$$

где $C_2 = \frac{1}{4} C_1$.

В процессе решения мы делили на выражение xz^2. Значит, могли потерять решения уравнения. Заметим, что $x = 0$ не является решением исходного дифференциального уравнения (27). Подставляя $z = 0$ в (30) имеем, что $y = \frac{2}{x}$. Проверкой убеждаемся, что $y = \frac{2}{x}$ является решением дифференциального уравнения (27).

Ответ. $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{C_2 x^5 - x}$, где C_2 - константа; $y = \frac{2}{x}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2 e^x. \tag{42}$$

Это уравнение Бернулли. Преобразуем уравнение (42).

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x. \tag{43}$$

Сделаем замену

$$t = \frac{1}{y}. \tag{44}$$

Тогда

$$t'_x = -\frac{1}{y^2} y'_x. \tag{45}$$

Подставим значения (44) и (45) в уравнение (43). Имеем

$$-t' + 2t = e^x. \tag{46}$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Для нахождения его решения, в соответствии с первым шагом алгоритма, сначала решаем однородное уравнение

$$-t' + 2t = 0.$$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{dt}{t} = 2dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части полученного равенства. Получим

$$\int \frac{dt}{t} = 2\int dx,$$

$$\ln|t| = 2x + \bar{C},$$

где $\bar{C}$ – константа. Следовательно

$$t = e^{2x} \cdot C. \qquad (47)$$

где C – константа. Решим неоднородное уравнение (46). В соответствии со вторым шагом алгоритма сделаем замену $C = C(x)$. Тогда

$$t'_x = 2e^{2x} \cdot C + e^{2x} \cdot C'_x. \qquad (48)$$

Подставим значения (47) и (48) в уравнение (46). Получим

$$-\left(2e^{2x} \cdot C + e^{2x} \cdot C'\right) + 2e^{2x} \cdot C = e^x,$$

$$C' = -e^{-x}.$$

Следовательно

$$C(x) = e^{-x} + C_1, \text{ где } C_1 \text{ - константа.}$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (46) имеет вид

$$t = e^{2x} \cdot \left(e^{-x} + C_1\right). \qquad (49)$$

Так как справедливо равенство (44) следовательно

$$\frac{1}{y} = e^{2x} \cdot \left(e^{-x} + C_1\right),$$

$$y = \frac{1}{e^{2x} \cdot \left(e^{-x} + C_1\right)},$$

$$y = \frac{1}{e^x + C_1 e^{2x}}.$$

В процессе решения мы делили на y. Следовательно, могли потерять решение. Заметим, что $y = 0$ является решением уравнения (42).

Ответ. $y = \dfrac{1}{e^x + C_1 e^{2x}}$, где C_1 - константа; $y = 0$.

5. Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения.
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
4. Что такое задача Коши?
5. В чем заключается геометрический смысл решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка?
6. Сколько решений в общем случае имеет дифференциальное уравнение?
7. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
8. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
9. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения.
10. Какой общий вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными?
11. В чем состоит алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
12. Какой общий вид имеет однородное дифференциальное уравнение?
13. Какая функция называется однородной?
14. В чем состоит алгоритм решения однородного дифференциального уравнения?
15. Какой общий вид имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка?
16. В чем состоит алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка?
17. В чем состоит метод вариации произвольной постоянной?
18. Какую структуру имеет общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка?
19. Какой общий вид имеет уравнение Бернулли?

20. В чем состоит алгоритм решения уравнения Бернулли?
21. Какой общий вид имеет уравнение Риккати?
22. В чем состоит алгоритм решения уравнения Риккати?

6. Тест тематического контроля

ТЕСТ ТЕМАТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Тест состоит из частей А, В, С и D. На его выполнение отводится 40 минут. Задания рекомендуется выполнять по порядку, не пропуская ни одного, даже самого легкого.

ВАРИАНТ 1-2

Часть А

К каждому заданию части А дано несколько ответов, из которых только <u>один</u> верный. Выберите верный, по Вашему мнению, ответ.

А1. Множество всех решений дифференциального уравнения $y' = e^{x+y}$ **имеет вид …, где** C **– константа**

1) $e^{y} = e^{x} + C$ **2)** $e^{-y} = e^{x} + C$

3) $\underline{-e^{-y} = e^{x} + C}$ **4)** $e^{y} = -e^{-x} + C$

А1. Множество всех решений дифференциального уравнения $y' = e^{x-y}$ ***имеет вид …, где*** C ***– константа***

1) $\underline{e^{y} = e^{x} + C}$ ***2)*** $e^{-y} = e^{x} + C$

3) $-e^{-y} = e^{x} + C$ ***4)*** $e^{y} = -e^{-x} + C$

А2. Множество всех решений дифференциального уравнения … имеет вид $y = x \cdot e^{x} + C$**, где** C **– константа**

1) $y' = (1-x) \cdot e^{x}$ **2)** $\underline{y' = (1+x) \cdot e^{x}}$

3) $y' = (1+x) \cdot e^{-x}$ **4)** $y' = (1-x) \cdot e^{-x}$

А2. Множество всех решений дифференциального уравнения … имеет вид $y = x \cdot e^{-x} + C$, где C – константа

1) $y' = (1-x) \cdot e^{x}$ ***2)*** $y' = (1+x) \cdot e^{x}$

3) $y' = (1+x) \cdot e^{-x}$ ***4)*** $\underline{y' = (1-x) \cdot e^{-x}}$

А3. Уравнение $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ **заменой … можно привести к однородному уравнению**

1) $y = z^2$ **2)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$

3) $\underline{y = \dfrac{1}{z}}$ **4)** $y = \sqrt[3]{z}$

А3. Уравнение $x^3(y' - x) = y^2$ ***заменой … можно привести к однородному уравнению***

1) $\underline{y = z^2}$ ***2)*** $y = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$

3) $y = \dfrac{1}{z}$ ***4)*** $y = \sqrt[3]{z}$

А4. Дифференциальное уравнение $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$ **является уравнением**

1) Бернулли **2)** не однородным

3) <u>однородным</u> **4)** Риккати

А4. Дифференциальное уравнение $x^2y' + 5xy + x^2y^2 = 0$ ***является уравнением***

1) *<u>Бернулли</u>* ***2)*** *не однородным*

3) однородным *4) Риккати*

А5. Дифференциальное уравнение … является уравнением Бернулли

1) $y' + 2y = x^2$ **2)** $\underline{x^2 y' + 5xy + x^2 y^2 = 0}$

3) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$ **4)** $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$

А5. Дифференциальное уравнение … является уравнением однородным

1) $y' + 2y = x^2$ *2)* $x^2 y' + 5xy + x^2 y^2 = 0$

3) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$ *4)* $\underline{y^2 + (x^2 - xy)y' = 0}$

Часть В

В заданиях части В выберите <u>все</u> верные, по Вашему мнению, ответы.

В6. Уравнение … заменой $y = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ **можно привести к однородному уравнению**

1) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ **2)** $\underline{xy' = xy^3 + y}$

3) $\underline{2xdy + (x^2 y^4 + 1)ydx = 0}$ **4)** $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$

В6. Уравнение … заменой $y = \dfrac{1}{z}$ ***можно привести к однородному уравнению***

1) $\underline{y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}}$ *2)* $xy' = xy^3 + y$

3) $2xdy + (x^2 y^4 + 1)ydx = 0$ *4)* $\underline{ydx + x(2xy + 1)dy = 0}$

В7. Среди перечисленных дифференциальных уравнений линейными уравнениями первого порядка являются

1) $x^2 + y^2 y' = 1$ **2)** $\underline{y' + 3y = -xe^{2x}}$

3) $\underline{y' - y = 3x - 2}$ **4)** $y' = \cos(y - x)$

В7. Среди перечисленных дифференциальных уравнений линейными уравнениями первого порядка являются

1) $\underline{y' - y = 2x - 3}$ ***2)*** $2x^2 yy' + y^2 = 2$

3) $y' = \sin(y - x)$ ***4)*** $\underline{y' - 2y = xe^{-x}}$

Часть С

Вставьте пропущенные слова в заданиях С8, С9, С10, так, чтобы получились верные высказывания. <u>Ответ (слово)</u> запишите на бланке заданий рядом с номером задания. В заданиях С11, С12 найдите соответствие и запишите ответы на бланке заданий <u>в виде последовательности цифр и букв</u> рядом с номером задания, например 1АБ2ВД3Г. В задании С13 найдите аналогию и запишите <u>ответ (слово)</u> рядом с номером задания.

С8. Дифференциальное уравнение называется …, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

(Ответ: **<u>обыкновенным</u>**)

С8. Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от … независимого переменного.

*(Ответ: **<u>одного</u>**)*

C9. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^n$, где $a(x)$ и $b(x)$ – заданные непрерывные функции; $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется уравнением …

(Ответ: **Бернулли**)

C9. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = C(x)$, где $a(x)$, $b(x)$ и $C(x)$ – заданные непрерывные функции, называется уравнением …

*(Ответ: **Риккати**)*

C10. Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, называются … дифференциальными уравнениями.

(Ответ: **однородными**)

C10. Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны в виде $y' = f(x) \cdot g(y)$, называются дифференциальными уравнениями с … переменными

*(Ответ: **разделяющимися**)*

C11. Найдите соответствие

Дифференциальное уравнение	*Частное решение*
1. $y' = \frac{1}{1+x}$ **2.** $y' = \frac{1}{1+x^2}$ **3.** $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ **4.** $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$	**А.** $y = arctg\ x$ **Б.** $y = ctg\ x$ **В.** $y = \ln\lvert 1+x \rvert$ **Г.** $y = -tg\ x$

(Ответ: 1В2А3Б4Г)

С11. Найдите соответствие

Дифференциальное уравнение	*Частное решение*
1. $y' = \dfrac{1}{1-x}$ **2.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **3.** $y' = -\sin x$ **4.** $y' = -\cos x$	**А.** $y = -\sin x$ **Б.** $y = -\ln\lvert 1-x\rvert$ **В.** $y = \arcsin x$ ***Г.*** $y = \cos x$

(Ответ: 1Б2В3Г4А)

С12. Найдите соответствие

Частное решение	*Дифференциальное уравнение*
1. $y = \arccos x^2$ **2.** $y = arctg\ x^2$ **3.** $y = \cos x^2$ **4.** $y = tg\ x^2$	**А.** $y' = -2x\sin x^2$ **Б.** $y' = \dfrac{2x}{\cos^2 x}$ **В.** $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ **Г.** $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

(Ответ: 1В2Г3А4Б)

С12. Найдите соответствие

Частное решение	*Дифференциальное уравнение*
1. $y = \arcsin x^2$ **2.** $y = arcctg\ x^2$ **3.** $y = \sin x^2$ **4.** $y = ctg\ x^2$	**А.** $y' = -\dfrac{2x}{\sin^2 x}$ **Б.** $y' = 2x\cos x^2$ **В.** $y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}$

	Г. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

(Ответ: 1Г2В3Б4А)

С13. Установите аналогию

$x^3(y'-x)=y^2\ :\ y=z^2$ = $y+x(2xy+1)y'=0:?$

(Ответ: $y=\frac{1}{z}$)

С13. Установите аналогию

$y'=y^2-\frac{2}{x^2}:\ y=\frac{1}{z}$ = $2xy'+(x^2y^4+1)y=0:$ *?*

(Ответ: $y=\frac{1}{\sqrt{z}}$)

Часть D

В заданиях части D решите уравнение и <u>напишите ответ</u>.

D14. Решите дифференциальное уравнение $xy'+y=y^2$.

(Ответ: $y(1-Cx)=1$, где $C-$ константа $y=0$).

D14. Решите дифференциальное уравнение $y'-x^2y=2xy$.

(Ответ: $(Ce^{-x^2}-1)y=2$, $y=0$*, где* $C-$ *константа)*

D15. Решите уравнение $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

(Ответ: $x(y-x)=Cy$, $y=0$, где $C-$ константа).

D15. Решите уравнение $(x+2y)dx-xdy=0$.

(Ответ: $x+y=Cx^2$, $x=0$*, где* $C-$ *константа).*

D16. Решите дифференциальное уравнение $xy' = 5y + x$.

(Ответ: $y = -\frac{1}{4}x + Cx^5$, где C – константа).

D16. Решите дифференциальное уравнение $y' = 2y - e^x$.

(Ответ: $y = e^x + Ce^{2x}$*, где* C *– константа).*

Результаты теста по теме «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» оцениваются оценками *«неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».*

Критерии оценки:

- ✓ правильное выполнение 90% - 100% заданий теста – отметка *«отлично»;*
- ✓ правильное выполнение 89% - 75% заданий теста – отметка *«хорошо»;*
- ✓ правильное выполнение 74% - 51% заданий теста – отметка *«удовлетворительно»;*
- ✓ правильное выполнение 50% заданий теста и менее – отметка *«неудовлетворительно».*

7. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Решить уравнение. Найти решение, удовлетворяющее данному условию
   $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.
2. Решить уравнение
   $x^2 + y^2 y' = 1$.
3. Решить уравнение
   $y' - y = 2x - 3$.
4. Решить уравнение
   $(x + 2y)dx - xdy = 0$.
5. Решить уравнение
   $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.
6. Решить уравнение
   $y' + 2y = xe^{-x}$.

Вариант 2

1. Решить уравнение. Найти решение, удовлетворяющее данному условию
   $y' = 2x + 1$; $y(2) = 5$.
2. Решить уравнение
   $y' - x^2 y = 2xy$.
3. Решить уравнение
   $(x + 2y)y' = 1$.

4. Решить уравнение

   $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

5. Решить уравнение

   $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$.

6. Решить уравнение

   $y'+3y=-xe^{2x}$.

Вариант 3

1. Решить уравнение. Найти решение, удовлетворяющее данному условию

   $(x^2-1)y'+2xy^2=0$; $y(0)=1$.

2. Решить уравнение

   $2x^2yy'+y^2=2$.

3. Решить уравнение

   $y'-y=3x-2$.

4. Решить уравнение

   $(x^2+y^2)y'=2xy$.

5. Решить уравнение

   $x^3(y'-x)=y^2$.

6. Решить уравнение

   $y'-y=2xe^x$.

Вариант 4

1. Решить уравнение. Найти решение, удовлетворяющее данному условию

$$y' = e^{-x};\ y(0) = \frac{2}{3}.$$

2. Решить уравнение

$$xy' + y = y^2.$$

3. Решить уравнение

$$(2x + y)y' = 1.$$

4. Решить уравнение

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

5. Решить уравнение

$$2xdy + (x^2 y^4 + 1)ydx = 0.$$

6. Решить уравнение

$$y' - 2y = xe^{-x}.$$

Заключение

Учебно-методическая разработка содержит теоретический материал, задания практического характера, методические рекомендации по их выполнению, которые способствуют усвоению, закреплению пройденного материала и проверку знаний по теме «**Дифференциальные уравнения первого порядка**» дисциплины «**Высшая математика**».

В соответствии с требованиями рабочей программой дисциплины «**Высшая математика**» по формированию универсальной (**УК-1**) и общепрофессиональной (**ОПК-1**) компетенций, при изучении материала, изложенного в учебно-методической разработке (практикум) «**Дифференциальные уравнения первого порядка**»:

1. студенты знакомятся с методами теории дифференциального исчисления;
2. подготавливается фундаментальная база для изучения других дисциплин;
3. происходит воспитание у студентов математической культуры;
4. формируется математическое мышление;
5. прививаются навыки работы в команде;
6. развиваются способности к самоорганизации и самообразованию.

Учебно-методическая разработка может быть полезна преподавателям при проведении практических занятий и формировании индивидуальных заданий обучающихся, а также студентам очной формы обучения.

Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.

2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1996. 479 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. М.: Высшая школа, 1986. 416 с.

4. Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова Н.Н. Справочник по математике для экономистов. М.: Высшая школа, 1997. 384 с.

5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2-х ч. Ч.1. М.: Высшая школа, 1982. 320 с.

6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1981. 716 с.

7. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.

8. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978. 287 с.

9. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для студентов вузов. М.: Наука, 1985. 128 с.

Александр Анатольевич **Федюков**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Практикум

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.