

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

**КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С  
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Практикум

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород  
2021

УДК 534.1(075.8)  
ББК В251.16я73  
К 60

**К 60 КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.** Авторы: Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Демин И.Ю., Клемина А.В., Курин В.В., Прончатов-Рубцов Н.В., Лисин А.А.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 28 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.В. Ключев**

В ходе данного практикума проводится ознакомление студентов с особенностями распространения волн в твердых средах на примере колебаний стержней и пластин. Студенты знакомятся с линейной теорией колебательных систем с распределенными параметрами, а также определяют резонансным методом некоторые механические параметры твердых материалов. В стержнях, изготовленных из различных материалов, определяются модуль Юнга и диссипативные параметры каждого материала в динамическом режиме. В круглых, закрепленных по краю пластинах определяются собственные частоты колебаний, измеряется амплитуда смещения в центре пластины для основного тона и вычисляется поток энергии, излучаемой пластиной в воздух.

Практикум предназначен для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственный за выпуск:  
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета  
ННГУ, д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 534.1(075.8)  
ББК В251.16я73

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ.....	4
ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН .....	8
ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА .....	21
Возбуждение продольных колебаний стержней .....	21
Возбуждение колебаний круглых пластин, зажатых по краям .....	24
ЗАДАНИЯ.....	25
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	27

Целью данного практикума является знакомство с линейной теорией колебаний механических систем с распределенными параметрами, определение резонансным методом механических параметров твердых тел.

## ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Выведем уравнение продольных колебаний в тонком абсолютно упругом стержне. Элементарный отрезок стержня  $\Delta x$ , ограниченный плоскостями  $x$  и  $x + \Delta x$ , растягивается под действием силы на величину  $\Delta \xi = \xi(x + \Delta x) - \xi(x) = \Delta x' - \Delta x$  (рис.1).

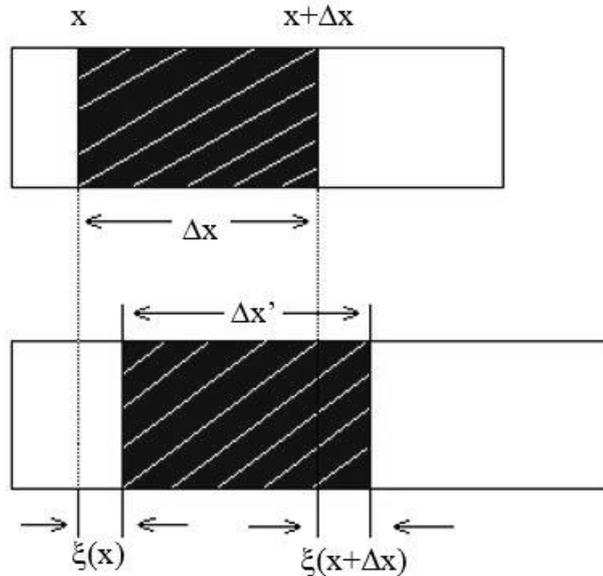


Рис. 1

Относительное удлинение элемента стержня (продольная деформация) есть:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Согласно закону Гука, напряжение, возникающее в стержне, равно:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (1.2)$$

где  $E$  – модуль Юнга, коэффициент, характеризующий упругие свойства материала.

Запишем 2-ой закон Ньютона для элемента стержня:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x), \quad (1.3)$$

где  $\rho$  – плотность,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

Поделив обе части уравнения (1.3) на  $S \Delta x$  и устремив  $\Delta x$  к 0, а также учитывая, что согласно (1.2)  $\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) - волновое уравнение. Его решения представляется в виде волн  $\xi(x, t) = f(x \pm ct)$ , или их суперпозиции,  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость распространения этих волн (скорость звука).

Учтем теперь потери в стержне. Сила вязкости, действующая на площадь  $S$ , пропорциональна градиенту скорости деформации:

$$F_B = \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \quad (1.5)$$

$\eta$  – коэффициент вязкости материала. Тогда 2-ой закон Ньютона запишется следующим образом:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x) + F_B(x + \Delta x) - F_B(x). \quad (1.6)$$

Поделив обе части соотношения (1.6) на  $S\Delta x$ , устремив  $\Delta x$  к 0 и учитывая (1.2), получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Будем искать решение (1.7) в виде  $\xi(x, t) = \xi(x)e^{-j\omega t}$ , где  $\omega$  – частота вынуждающей силы. Получим выражение для амплитуды колебаний  $\xi(x)$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + k_1^2 \xi = 0, \quad (1.8)$$

где  $k_1 = \omega / \sqrt{\frac{E - j\omega\eta}{\rho}}$ . Можно считать, что вязкий стержень имеет комплексный модуль упругости  $E_1 = E - j\omega\eta$ . Решение уравнения (1.8) для амплитуды примет вид:

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{-jk_1 x} + \xi_1 e^{+jk_1 x}. \quad (1.9)$$

Учтем граничные условия на концах стержня:

В сечении  $x = 0$  на стержень действует сила  $F = F_0 e^{-j\omega t}$ . При этом в сечении возникает напряжение, равное напряжению этой силы:

$$(E - j\omega\eta) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_0/S. \quad (1.10)$$

2) В сечении  $x = l$  напряжение равно нулю:

$$(E - j\omega\eta) \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (1.11)$$

С учетом этих условий окончательно получим:

$$\xi(x, t) = \frac{F_0 e^{-j\omega t} \operatorname{ch}(jk_1(1-x))}{jk_1(E-j\omega\eta)S \operatorname{sh}(-jk_1l)} \quad (1.12)$$

при отсутствии затухания  $\eta = 0$ , и решение (1.12) принимает вид:

$$\xi(x, t) = \frac{F_0 e^{-j\omega t} \cos(k(1-x))}{kES \sin(kl)} \quad (1.13)$$

Из этого выражения видно, что при  $kl = 2\pi n$ , где  $k = \omega/c$ , амплитуда колебаний стремится к бесконечности (условие резонанса). Это будет выполняться на частотах

$$f_n = nc/2l. \quad (1.14)$$

При  $\frac{\omega\eta}{E} = \gamma \ll 1$   $k_1 = k(1 + j\frac{\gamma}{2})$ , и решение принимает вид:

$$\xi(x, t) = \frac{F_0 e^{(-j\omega\eta)} (\cos k(1-x)) - j\frac{\gamma}{2}(1-x)\sin k(1-x)}{-jk(E-j\omega\eta)S(-j\sin kl + \frac{\gamma}{2})\cos kl} \quad (1.15)$$

В случае малых потерь резонанс наступает почти на тех же частотах, что и в стержне без потерь. Распределение амплитуды немного отличается от синусоидального и амплитуда колебаний при резонансе конечна.

Возбуждение продольных колебаний в стержне дает возможность определить модуль Юнга и коэффициент вязкости. Изменяя частоту вынуждающей силы, находим первую резонансную частоту. Зная ее и длину стержня, можем рассчитать скорость звука, как  $c = 2lf_{\text{рез}}$ . При малых затуханиях можно с достаточной степенью точности считать  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Отсюда  $E = \rho c^2$ .

Для определения коэффициента вязкости необходимо снять резонансную кривую, определить ширину полосы на уровне 0,7 и найти добротность как  $Q = f/\Delta f|_{0,7}$ . Решение для  $\xi(x, t)$  представляется в виде двух бегущих навстречу волн с затухающей амплитудой. При малых затуханиях:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp\left(\frac{-\gamma}{2}kx + j(-\omega t - kx)\right) + \xi_1 \exp\left(\frac{\gamma}{2}kx + j(-\omega t + kx)\right).$$

Логарифмический декремент затухания (на расстоянии  $\lambda$ ) равен:

$$a = \ln \frac{e^{\frac{-\gamma}{2}kx_1}}{e^{\frac{-\gamma}{2}kx_2}} = \frac{\gamma}{2}k(x_2 - x_1) = \frac{\gamma}{2}k\lambda = \gamma\pi = \frac{\pi}{Q}.$$

Отсюда  $\gamma = 1/Q$ , и  $\eta = \gamma E/\omega$ .

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

Перейдем к анализу изгибных колебаний тонких пластин. В пластине прогиб срединной поверхности вдоль оси  $z$   $W=W(x,y)$  может происходить как в плоскости  $xz$  (рис. 2), так и в плоскости  $yz$  под действием изгибающих моментов сил  $M_{xx}(x,y)$ ,  $M_{yy}(x,y)$ , крутящего момента сил  $M_{xy}(x,y)$  и внешней нагрузки с интенсивностью  $P(x,y)$ . Для малых прогибов

$$W(x, y) \ll h, \tag{2.1}$$

тонкой пластины требуются слабые внешние усилия, приложенные к её поверхности. Эти усилия значительно меньше, чем внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластины благодаря имеющимся в ней растяжениям и сжатиям. Поэтому на поверхности пластины, как и внутри ее, можно считать следующие компоненты тензора напряжений равными нулю:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy}, \quad (2.2)$$

(при малых прогибах нормаль к поверхности пластины можно считать совпадающей с осью  $z$ ). При условии (2.2) из закона Гука получим следующие связи между деформациями удлинения  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  и деформацией сдвига  $\varepsilon_{xy}$  в плоскости  $xu$  с соответствующими компонентами тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) определяют так называемое плоское напряженное состояние упругого тела. Разрешив уравнения (2.3) относительно напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}), \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.4) используются при анализе изгибных колебаний пластины. Отметим, что в соотношения (2.4) входит упругая постоянная в виде  $E/(1-\nu^2)$  в отличие от постоянной  $E$ , для соотношения упругости в стержне (см. раздел 1).

С целью определения связи между возникающими внутренними напряжениями и внешними усилиями, рассмотрим деформацию элемента пластины объёмом  $dV=hdxdy$  (рис. 2) при чистом изгибе пластины, когда

изгибающие внешние моменты  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  постоянны, т.е.  $M_{xx}=\text{const}$ ,  $M_{yy}=\text{const}$ . Здесь под  $M_{xx}$  понимаем изгибающий момент сил, отнесенный к единице длины, действующий по краям, параллельным оси  $y$  и вызывающий изгиб в плоскости  $xz$ ; аналогично момент  $M_{yy}$  – вызывает изгиб в плоскости  $yz$ . В соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява будем считать, что нормальные сечения  $m, n, n_1, m_1, n_2, m_2$  остаются перпендикулярными и к деформированной срединной поверхности  $ABCD$  элемента пластины. Как и при изгибе стержня кривизны срединной поверхности пластины  $\chi_{xx}=1/\rho_x$ ,  $\chi_{yy}=1/\rho_y$  в плоскостях  $xz$  и  $yz$  определяются соотношениями

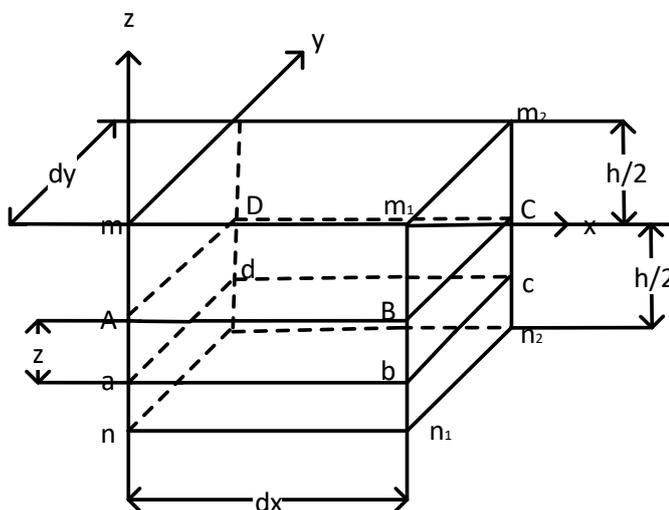


Рис. 2

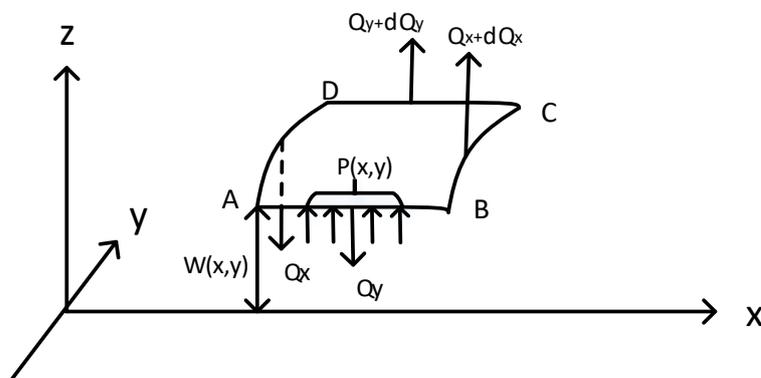


Рис. 3

$$AD = dy, AB = dx, Q_x = \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx, dQ_y = \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy.$$

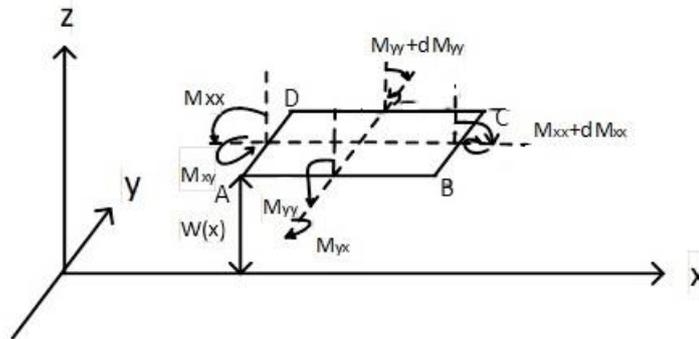


Рис.4

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \chi_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (2.5)$$

Тогда можно найти деформации удлинения в направлении осей  $x$  и  $y$  для элементарного слоя  $abcd$ , отстоящего от срединной поверхности  $ABCD$  на расстояние  $z$ :

$$\epsilon_{xx} = z\chi_{xx}, \epsilon_{yy} = z\chi_{yy}. \quad (2.6)$$

Используя теперь закон Гука (2.4) и соотношения (2.5), (2.6), найдём соответствующие напряжения в слое  $abcd$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как и в случае стржня, эти усилия пропорциональны расстоянию  $z$  слоя  $abcd$  от срединной поверхности и зависят от величины кривизны изогнутой

пластины  $\chi_{xx}$  и  $\chi_{yy}$  – главных кривизн срединной поверхности. Результирующее действие этих внутренних напряжений по толщине пластины приведет к возникновению изгибающих моментов, которые уравновесят действие внешних моментов сил. Учитывая (2.5)-(2.7), получим:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz dy = M_{xx} dy, M_{xx} = D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz dy = M_{yy} dx, M_{yy} = D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad (2.8)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где  $D$  – жесткость пластины при изгибе, или цилиндрическая жесткость.  $M_{xx}, M_{yy}$  – изгибающие моменты сил в пластине, действующие в плоскостях  $xz$  и  $yz$  соответственно.

При определении крутящего момента  $M_{xy}$  необходимо учесть, что величины  $\frac{\partial W}{\partial x} \approx \theta_x, \frac{\partial W}{\partial y} \approx \theta_y$  определяют углы поворота элемента пластины соответственно в плоскостях  $xz$  и  $xy$ . Тогда, например, величина  $\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$  будет определять скорость изменения угла поворота  $\theta_x$  вдоль оси  $y$ , т.е. угол кручения (аналогично  $\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$ ).

Отсюда, деформация сдвига элемента  $abcd$ , удаленного на расстояние  $z$  от срединной поверхности пластины  $ABCD$  (рис. 3) будет равна

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = z \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}. \quad (2.9)$$

Используя (2.9), из закона Гука (2.4) получим следующие соотношения для сдвиговых напряжений  $\sigma_{xy}$  и соответствующих им крутящих моментов  $M_{xy}$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} (1-\nu),$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz dy = M_{xy} dy,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (2.10)$$

Определив изгибающие и крутящие моменты, найдем связи между ними, поперечными силами  $Q_x, Q_y$  и внешней нагрузкой с интенсивностью  $P(x, y)$ , вызывающей малый изгиб пластины в общем случае. Для этого рассмотрим условия равновесия выделенного элемента пластины размерами  $dx dy$  (рис. 2). С этой целью на рис.3, 4 представлена срединная плоскость элемента ABCD, где указаны направления сил и моментов, вызывающих смещение этого элемента на величину  $W(x, y)$  в положительном направлении оси  $z$ .

Проектируя все приложенные к элементу силы на ось  $z$  получим следующее уравнение равновесия  $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + P dx dy = 0$ , из которого получим

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = 0. \quad (2.11)$$

Взяв моменты от всех действующих на элемент сил относительно оси  $x$ , получим уравнение равновесия:

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0, \quad (2.12)$$

в котором моментам нагрузки  $P$  и моментам, возникающим вследствие изменения силы  $Q_y$  пренебрегли как величинами более высокого порядка малости. После упрощения получим

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (2.13)$$

Аналогичным образом, взяв моменты сил относительно оси  $y$ , получим

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (2.14)$$

В принятых предположениях гипотезы Кирхгофа-Лява результирующих сил в направлениях  $x$  и  $y$  нет, а относительно оси  $z$  нет моментов. Поэтому три уравнения (2.12), (2.13), (2.14) полностью определяют равновесие элемента пластины.

Определив поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  из (2.13), (2.14) и подставив их в (2.12), получим уравнение равновесия в форме, удобной для дальнейшего анализа:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -P. \quad (2.15)$$

Далее, в соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява будем считать, что значения изгибающих и крутящих моментов в случае поперечной нагрузки пластины приближенно определяются соотношениями (2.7),(2.11), полученными для случая чистого изгиба пластины. В результате, подставляя (2.9),(2.11),(2.15), получим дифференциальное уравнение для определения прогиба пластины  $W(x,y)$  под действием нагрузки  $P(x,y)$ :

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = -P, \\ D \Delta \Delta W = -P, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

и следующие выражения для поперечных сил:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W, Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W. \quad (2.17)$$

Здесь  $\Delta$  - оператор Лапласа, записанный в декартовой системе координат.

Уравнение (2.16) можно использовать для получения уравнения изгибных колебаний пластины. Для этого в соответствии с принципом Даламбера будем считать, что колеблющаяся пластина нагружена поперечными силами инерции  $m_s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ , где  $m_s = \rho_s h$  – масса единицы поверхности пластины толщины  $h$ ,  $\rho_s$  – плотность материала пластины.

В результате, учитывая, что интенсивность поперечной нагрузки равна  $P = m_s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$  из (2.16) получаем

$$D\Delta\Delta W + m_s \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

- простейшее уравнение изгибных колебаний однородной пластины. Уравнение (58) можно записать ещё в другом виде, выразив константы  $D$ ,  $m_s$  через  $\nu$ -коэффициент Пуассона,  $E$ - модуль Юнга,  $H$ - полутолщина пластины и  $\rho_s$  – плотность материала пластины

$$\Delta^2 W + \frac{3\rho_s(1-\nu^2)}{EH} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2.19)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2. \quad (2.20)$$

Для частного решения уравнения (2.19), зависящего от времени по гармоническому закону

$$W = W(x, y)e^{-i\omega t} \quad (2.21)$$

из (2.19) имеем:

$$\Delta^2 W - \gamma^4 W = 0, \quad (2.22)$$

где параметр  $\gamma$  связан с  $\omega$  соотношением

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{3\rho_s(1-\nu^2)}{EH}. \quad (2.23)$$

Решение уравнения (2.22) при колебаниях пластины конечных размеров должно удовлетворять определённым граничным условиям по краю пластины. Приведем наиболее распространенные граничные однородные условия для прямоугольной пластины на линии

- при заделке края

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (2.24 \text{ а})$$

-при шарнирном опирании

$$W = 0, M_{xx} = 0, \quad (2.4 \text{ б})$$

-для свободного случая

$$D \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = Q_x + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0. \quad (2.24 \text{ в})$$

$$M_{xx} = 0$$

Условия на краю  $y = \text{const}$  получаются из (64) простой заменой  $y \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow y$ .

На практике, а также и в экспериментальной установке данной лабораторной работы, применяются круглые пластины. В этом случае оператор Лапласа необходимо записать в полярной системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (2.25)$$

где  $r$ -радиус, а  $\varphi$ -амплитудный угол. Соответствующие граничные условия (64) при  $r = \text{const}$  можно записать в виде:

-при заделке края

$$W = 0, \frac{\partial W}{\partial r} = 0, \quad (2.26 \text{ а})$$

-при шарнирном опирании

$$W = 0, M_{rr} = D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right), \quad (2.26 \text{ б})$$

-для свободного случая

$$Q_r = \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$M_{r\varphi} = D(1 - \nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \right),$$

$$M_{rr} = 0. \quad (2.26 \text{ в})$$

Перейдем к более подробному анализу изгибных колебаний круглых пластин с закрепленным краем, т.е. будем искать решение уравнения (2.22) с граничным условием (2.26а) в полярной системе координат, т.е.

$$\Delta^2 W - \gamma^4 W = 0,$$

$$W|_{r=a} = 0, \frac{\partial W}{\partial r}|_{r=a} = 0.$$

Уравнение (2.22) можно представить как  $(\Delta - \gamma^2)(\Delta + \gamma^2)W = 0$  и привести к двум уравнениям второго порядка:

$$(\Delta + \gamma^2)W = 0, (\Delta - \gamma^2)W = 0. \quad (2.27)$$

Для первого уравнения (2.27) решение при  $0 \leq x \leq a$  имеет вид

$$W_m = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} J_m(\gamma r), \quad (2.28)$$

где  $m=0,1,2,\dots$ ,  $J_m(\gamma r)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $m$ .

Решение второго уравнения (2.27) выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента

$$\widetilde{W}_m = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} J_m(j\gamma r), \quad (2.29)$$

где  $j$  – мнимая единица. Отметим, что функции мнимого аргумента можно выразить через гиперболические функции Бесселя по формуле  $I_m(\gamma r) = (j)^m J_m(j\gamma r)$

Всевозможные простые решения для круглых пластин можно представить в виде суммы решений (2.28), (2.29)

$$W_m = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} (A_m J_m(\gamma r) + B_m I_m(\gamma r)), \quad (2.30)$$

где  $m=0,1,2,\dots$ . Таким образом, в соответствии с числом значений имеется счетное множество возможных решений.

Для определения постоянных  $A_m$  и  $B_m$  и допустимых значений параметра  $\gamma$  необходимо учесть граничные условия. Для зажатого по окружности края пластины

$$W|_{r=a} = 0, \frac{\partial W}{\partial r}|_{r=a} = 0. \quad (2.31)$$

Подставляя (2.30) в первое условие (2.31) имеем

$$B_m = -A_m \frac{J_m(ra)}{I_m(ra)}. \quad (2.32)$$

Производная с учетом (2.32) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \gamma (A_m J'_m(\gamma r) + B_m I'_m(\gamma r)), \\ \frac{\partial W}{\partial r} &= \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \gamma A_m \left( J'_m(\gamma r) - \frac{J_m(ra)}{I_m(ra)} I'_m(\gamma r) \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

и с учетом второго краевого условия (2.31) дает бесконечно большое число уравнений для каждого  $m$

$$I_m(ra) J'_m(ra) - J_m(ra) I'_m(ra) = 0. \quad (2.34)$$

Решение каждого из уравнений (2.34) относительно  $\gamma a$  может быть представлено в виде

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi}{a} \beta_{mn}, (m, n = \dots), \quad (2.35)$$

где  $\beta_{mn}$  имеет следующие значения

$\beta_{01} = 1,015$	$\beta_{02} = 2,007$	$\beta_{03} = 3,000$
$\beta_{11} = 1,468$	$\beta_{12} = 2,483$	$\beta_{13} = 3,490$
$\beta_{21} = 1,879$	$\beta_{22} = 2,992$	$\beta_{23} = 2,000$

при  $n \rightarrow \infty \beta_{mn} \rightarrow n + m/2$

Используя (2.35) и (2.23) для дискретного набора собственных частот изгибных колебаний пластины, получаем

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 H}{a} \beta_{mn}^2 \left( \frac{E}{3\rho_s(1-\nu^2)} \right)^{1/2},$$

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi}. \quad (2.37)$$

Анализ выражения (2.37) показывает, что собственные частоты изгибных колебаний пластины не находятся в целочисленном отношении с наибольшей собственной частотой, т.е. не являются гармоническими обертонами какого-либо основного тона.

В частности

$$f_{01} = 0,934 \frac{H}{a^2} \left( \frac{E}{3\rho_s(1-\nu^2)} \right)^{1/2},$$

$$f_{02} = 3,309 f_{01}, f_{11} = 2,09 f_{01},$$

$$f_{21} = 3,426 f_{01}, f_{22} = 5,983 f_{01}. \quad (2.38)$$

Колебания пластины, происходящие с собственными частотами, носят название нормальных колебаний (мод). Каждая мода колебаний характеризуется двойным индексом  $mn$ .

При колебаниях с образованием узловых колец и диаметров поверхность пластины разбивается на зоны, разделенные узловыми линиями, причем колебания в любой зоне происходят в противофазе с соседними зонами. При

низшей (основной) частоте  $f_{01}$  вся поверхность пластины колеблется с одной фазой. Форма колебания пластины в этом случае показана на рис.5.

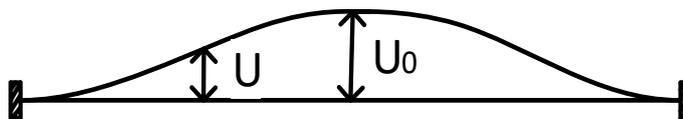


Рис. 5

При воздействии на пластину силой, изменяющейся по гармоническому закону,

$$F = F_0(r, \varphi)e^{i\omega t}$$

с частотой  $\omega=2\pi f$ , в пластине возбуждаются вынужденные колебания. Если частота возбуждающей силы соответствует частоте одной из собственных  $m$  колебаний пластины  $\omega_{mn}$ , то наступает механический резонанс.

Поперечные колебания пластин можно наблюдать визуально в экспериментальных условиях при использовании фигур Хладни. Для этого на поверхность горизонтальной пластины, находящейся под действием вынуждающей внешней силы, насыпается песок. При поперечных колебаниях песок сбрасывается с пучностей и собирается на узловых линиях, образуя фигуры Хладни. Эти фигуры дают картину узловых линий, пересекающих поверхность пластины при ее колебаниях. Вид фигур зависит от возбуждаемой моды колебаний. На рис.6 показано несколько примеров фигур Хладни в круглой пластине, зажатой по краям.

Знаками +,- обозначены участки пластины, находящиеся в любой момент в противоположных фазах колебаний.

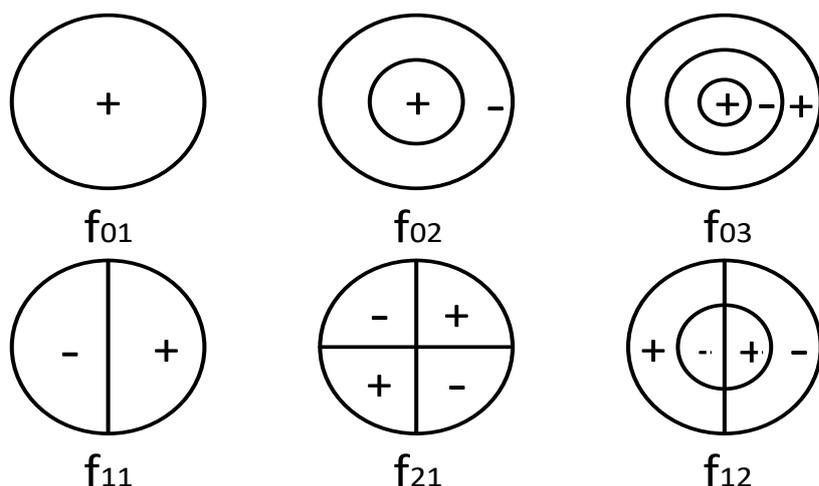


Рис. 6

В заключение отметим, что при получении формулы (2.30) не учитывалась диссипация энергии. В то же время затухание в эксперименте возникает из-за трения о воздух и трения в местах закрепления, внутреннего трения в материале пластины и благодаря излучению звука в воздух. В идеальной пластине без трения амплитуда колебаний при резонансных частотах теоретически равна бесконечности. С учетом потерь энергии амплитуда колебаний будет конечна, причем резонансная кривая тем острее, чем меньше диссипация.

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

### Возбуждение продольных колебаний стержней

Для возбуждения продольных колебаний стержней используется экспериментальная установка, блок-схема которой приведена на рис. 7.

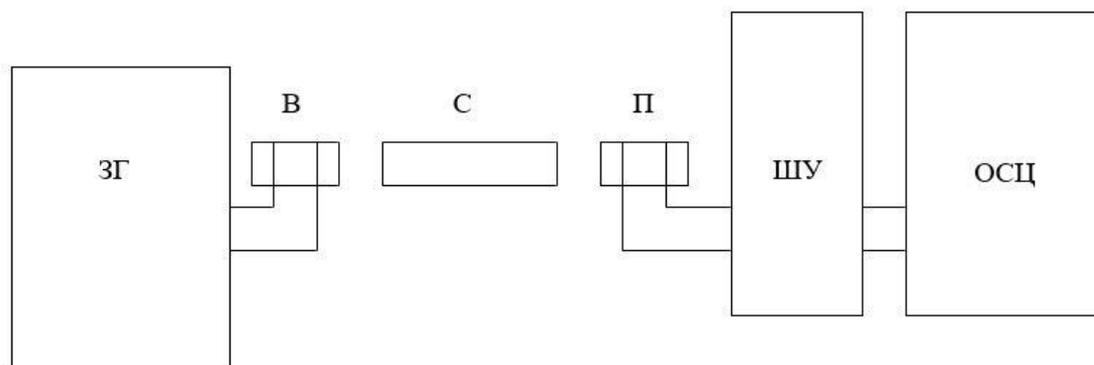


Рис. 7

В установку входят следующие приборы:

ЗГ – звуковой генератор;

В - электромагнитный возбудитель;

П – электромагнитный приёмник;

С – испытываемый стержень;

ШУ – широкополосный усилитель;

ОСЦ – осциллограф.

Стержень возбуждается электромагнитным возбудителем, в качестве которого используется обычный электромагнитный телефон без мембраны.

При подаче на катушку телефона напряжения со звукового генератора на торец стержня действует периодически меняющаяся сила притяжения, и в стержне возбуждаются упругие продольные волны. Если стержень не обладает электромагнитными свойствами (сделан из эбонита, алюминия, латуни, и т.д.), то, для возбуждения в нем продольных колебаний, к его торцам приклеены тонкие листочки трансформаторного железа (они в длине стержня не учитываются). К другому концу стержня при помощи микрометрического винта приближается такой же электромагнитный приёмник, в котором при колебаниях стержня возникает переменная ЭДС.

Электрические колебания с электромагнитного приёмника подаются на широкополосный усилитель, а затем наблюдаются на экране осциллографа. Для усиления возбуждения и увеличения показаний на осциллографе, возбудитель и особенно приёмник необходимо приблизить как можно ближе к стержню (однако, избегая касания, так как иначе свобода колебаний стержня нарушается). Это особенно важно, когда наблюдаются высшие гармоники стержней со сравнительно большим затуханием (текстолит), где амплитуды колебаний малы.

Напряжение с звуковым генераторе на телефон следует подавать не более 50-70 Вольт. Стержень нужно зажимать точно посередине, в узле смещения, иначе будет повышенное затухание, а резонансные частоты несколько сместятся.

## Возбуждение колебаний круглых пластин, зажатых по краям

Блок-схема установки для исследования колебаний пластин представлена на рис. 8.

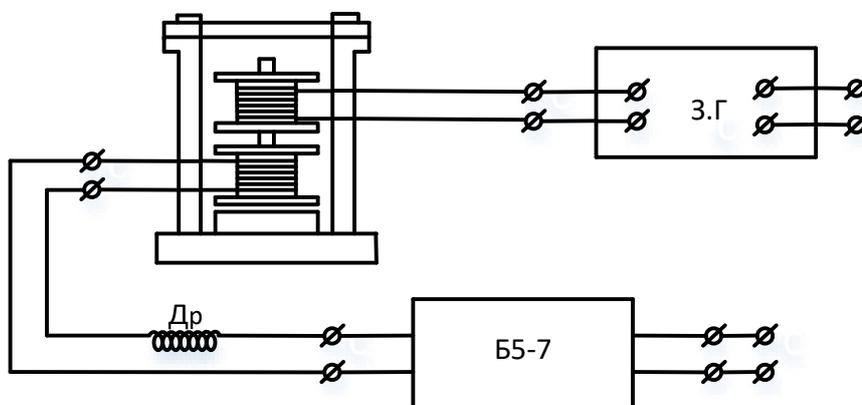


Рис. 8

В установку входят следующие приборы:

- 1) генератор звуковых колебаний;
- 2) источник постоянного тока Б5-7;
- 3) станок для крепления пластинок с электромагнитным возбудителем колебаний.

В возбудителе на одном сердечнике намотаны две катушки: катушка, питаемая от звукового генератора, и катушка подмагничивания, питаемая постоянным током. При одновременном питании электромагнита постоянным током и переменным током  $i_0 \sin \omega t$  возникает электромагнитная сила, пропорциональная

$$(I_0 + i_0 \sin \omega t)^2 = I_0^2 + 2I_0 i_0 \sin \omega t + (i_0 \sin \omega t)^2. \quad (2.39)$$

При  $I_0=0$  или  $I_0 \ll i_0$  возбуждение определяется третьим слагаемым (2.39) и при учете

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

видно, что возбуждение колебаний будет происходить с частотой в два раза больше частоты генератора. Если  $I_0 \gg i_0$ , то третьим слагаемым в (2.39) можно пренебречь, и переменная сила возбуждения имеет частоту  $\omega$ . Ток подкачивания устанавливается реостатом от 1 до 1,5А.

Частота колебаний пластины отсчитывается по фигурам, образованным песком, насыпанным сверху на пластину. Песок при совпадении частоты возбуждающей силы с соответствующей собственной частотой изгибного колебания пластины собирается в узлах и дает четкие Хладниевы фигуры. С помощью ходового винта можно перемещать электромагнит под пластиной и выбрать оптимальную точку для возбуждения различных мод, подводя электромагнит к пучностям соответствующего колебания на поверхности пластины.

## ЗАДАНИЯ

1. Ознакомиться с линейной теорией изгибных колебаний стержней и пластин.
2. Возбудить колебания поочередно в стальном, алюминиевом, текстолитовом и деревянном стержнях.
3. Снять резонансные кривые стержней, пользуясь ручкой плавной расстройки звукового генератора. Определить добротность  $Q$  для каждого стержня.
4. Подсчитать значение модуля Юнга  $E$  и оценить величину коэффициента вязкости для каждого материала.
5. Проверить выполнимость в эксперименте условий, принятых при расчетах.

6. Найти основной тон и 5-6 обертонов колебаний пластины под действием вынуждающей силы. Найти наилучшие условия их возбуждения. Зарисовать полученные фигуры Хладни. Рассчитать основную частоту и обертоны теоретически и сравнить с найденными экспериментально. Опыты провести для трех железных пластин различной толщины.

7. Рассчитать амплитуду смещения в центре пластин для основного тона. Оценку произвести для таких смещений пластины, при которых наблюдается отрыв от поверхности пластины.

При выполнении задания необходимо учесть следующее обстоятельство. Песчинки при некоторой предельной амплитуде колебаний начинают подпрыгивать. Причем отрыв их от поверхности пластины будет происходить при условии, что ускорение песчинки больше ускорения силы тяжести ( $U\omega^2 > g$ ), а для песчинок, лежащих на границе между зоной подпрыгивания и покоя  $U\omega^2 = g$ . Следовательно, амплитуда колебаний пластины  $U = g/\omega^2$ . Этот метод позволяет легко определить малые амплитуды колебаний пластины.

8. Зная амплитуду колебаний пластины в пучности смещения и частоту, оценить излученный пластиной поток энергии в воздух. Пластины идеализировать колеблющимся поршнем в бесконечном плоском экране, причем среднюю амплитуду смещения поверхности пластины считать равной  $U_{cp} = 0,3U_0$ , где  $U_0$  - амплитуда колебаний в пучности. Для расчета мощности, излученной поршнем на низших частотах ( $ka \ll 1$ ) можно использовать формулу:

$$N = \frac{1}{2} \frac{\rho \omega^4 S^2}{2\pi c} U_{cp}^2,$$

где  $\rho = 1,29 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> – плотность воздуха,

$\omega$  - частота колебаний,

$S$  - площадь поршня,

$c = 3,31 \cdot 10^4$  см/сек – скорость звука в воздухе.

## ПРИМЕЧАНИЕ

Прежде чем приступить к выполнению пункта 2, необходимо рассчитать теоретически основные резонансные частоты стержней для продольных колебаний. Затем, плавно меняя частоту генератора, найти их экспериментально.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука. 1973. 502 с.
2. Ландау Л.М., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука. 1987. 248 с.
3. Работников Ю.П. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Либроком. 2009. 312 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Вещество	Скорость звука (м/с)		Модуль Юнга (ГПа)	Плотность (кг/м <sup>3</sup> )
	В неограниченной среде	Продольная в стержне		
1. Сталь	6100	5210	200	7800
2. Алюминий	6400	5140	70	2700
3. Латунь	4250	2830	71	8500
4. Плексиглаз	-	2040	5	1180

# **КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Авторы:

**Сергей Николаевич Гурбатов**

**Ирина Юрьевна Грязнова**

**Игорь Юрьевич Демин и др.**

*Практикум*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.