

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"

**А.С. Васин**

# **Применение численных методов к моделированию физических процессов**

**Практикум**

Рекомендовано методической комиссией физического факультета  
для студентов физического факультета ННГУ,  
обучающихся по направлению подготовки  
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

2-е издание, исправленное и дополненное

Нижегород

2021

УДК 159.6

ББК В19

В-19

В-19 Васин А.С. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ: Практикум. – 2-е изд. исправл. и доп. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2021. – 44 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент А.И. Малышев

Пособие предназначено для студентов 2 курса физического факультета, изучающих курс “Применение численных методов к моделированию физических процессов”. В нем изложены некоторые теоретические сведения по указанной дисциплине, приведены методические указания по разработке алгоритмов и составлению программ, а также задания по разделам “Движение в гравитационном поле”, “Колебания” и некоторые другие.

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии  
физического факультета ННГУ, к.ф.-м.н., доц. А.А. Перов

УДК 159.6  
ББК В19

А.С. Васин

© Нижегородский государственный университет  
им. Н.И Лобачевского, 2021

## Содержание

1. Введение . . . . .	5
2. Методические указания . . . . .	6
2.1. Составление физической модели задачи . . . . .	6
2.2. Составление математической модели задачи . . . . .	6
2.3. Выбор метода численного решения . . . . .	6
2.4. Составление программы расчетов . . . . .	9
2.5. Тестирование программы . . . . .	9
2.6. Составление отчета по выполненной работе . . . . .	9
3. Задачи . . . . .	10
3.1. Затяжной прыжок парашютиста . . . . .	11
3.2. Подъем воздушного шара в стратосферу . . . . .	12
3.3. Вертикальный полет ракеты . . . . .	13
3.4. Движения шара с учетом сопротивления воздуха . . . . .	14
3.5. Движения артиллерийских снарядов в реальных условиях . . . . .	14
3.6. Стрельба из дальнобойного орудия . . . . .	15
3.7. Удар на поле для гольфа . . . . .	16
3.8. Шарик подо льдом . . . . .	17
3.9. Полет тактической неуправляемой ракеты . . . . .	17
3.10. Демонстрация эффекта Магнуса . . . . .	18
3.11. Крученный удар . . . . .	19
3.12. Проверка второго закона Кеплера . . . . .	20
3.13. Проверка третьего закона Кеплера . . . . .	21
3.14. Моделирование силы «гравитационного» взаимодействия, не пропорциональной обратному квадрату . . . . .	21
3.15. Моделирование движения двух планет вокруг Солнца . . . . .	22
3.16. Движение одной планеты в поле тяготения двух звезд . . . . .	22
3.17. Влияние Солнца и Луны на движение ИСЗ . . . . .	23
3.18. Запуск с Земли спутника на орбиту вокруг Луны . . . . .	23
3.19. Влияние «солнечного ветра» на движение спутника вокруг Земли .	23

3.20. Маневрирование космического корабля на орбите . . . . .	24
3.21. Спуск космического корабля с орбиты с учетом земной атмосферы	25
3.22. Торможение спутника в верхних слоях атмосферы . . . . .	26
3.23. Запуск космического спутника одноступенчатой ракетой-носителем на заданную эллиптическую орбиту . . . . .	27
3.24. Запуск баллистической ракеты . . . . .	27
3.25. Пружинный маятник . . . . .	28
3.26. Доска на катках . . . . .	29
3.27. Контур с индуктивностью в магнитном поле . . . . .	30
3.28. Земной маятник . . . . .	31
3.29. Математический маятник при больших углах отклонения . . . . .	32
3.30. Груз на пружинке в горизонтальной плоскости. . . . .	32
3.31. Пружинный математический маятник . . . . .	33
3.32. Двумерный осциллятор на 2-х пружинках . . . . .	33
3.33. Двумерный осциллятор на 4-х пружинках . . . . .	34
3.34. Связанные осцилляторы: продольные колебания . . . . .	35
3.35. Связанные осцилляторы: поперечные колебания . . . . .	36
3.36. Двойной маятник . . . . .	36
3.37. Параметрический резонанс . . . . .	37
3.38. Конический маятник . . . . .	38
3.39. Маятник Фуко . . . . .	39
3.40. Столкновение шайб. . . . .	40
3.41. Зайцы – лисы . . . . .	41
Литература . . . . .	42
Приложение . . . . .	43

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Численные методы находят широкое применение при моделировании различных физических процессов и систем. Дело в том, что, большинство реальных физических задач в силу их сложности не имеют точного решения. Однако во многих случаях решение может быть найдено с заданной степенью точности при использовании различных методов приближенных вычислений. Умение применять численные методы для моделирования физических задач - важная составляющая в образовании студентов-физиков. В этом случае имеется прекрасная возможность для совершенствования навыков алгоритмизации поставленной задачи и программирования, а также для повторения и закрепления соответствующих разделов курса общей физики.

В настоящем методическом пособии в основном рассмотрены несложные задачи, изучающие движение тел в гравитационном поле и колебательное движение, т.е. описывающие физический процесс во времени. Они требуют решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или их систем. Поэтому студент должен, в первую очередь, ознакомиться с численными методами решения ОДУ.

Важнейшей частью решения задачи является ее грамотная физическая и математическая постановка. Студент должен четко представлять физическую модель данной задачи, знать начальные условия и исходные параметры задачи, метод численного решения, его ограничения и возможности, вид наиболее оптимального графического или иного представления полученных результатов.

При разработке программы следует правильно ее структурировать, т.е. выделять самостоятельные части алгоритма в виде отдельных подпрограмм-функций. На заключительном этапе программу расчетов необходимо тщательно протестировать, проверив правильность ее работы для

упрощенной модели, результаты для которой могут быть получены другими методами или найдены точно.

Разработанная программа должна иллюстрировать изучаемое явление и выдавать его характеристики, указанные в задании. По каждой задаче должен быть составлен и сдан в распечатанном виде отчет.

Во втором издании уточнены задания для нескольких предыдущих задач и добавлены 22 новые задачи.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

### 2.1. Составление физической модели задачи

На этом этапе необходимо нарисовать расчетную схему задачи, указать силы, записать 2-ой закон Ньютона для движущегося тела (или тел) в произвольной точке траектории, записать формулы для всех сил, действующих на тело, записать физические константы и заданные параметры задачи (например, в системе СИ).

### 2.2. Составление математической модели задачи

На этом этапе выбирается система координат. Удобнее всего взять декартову 2-х мерную (а в некоторых задачах 3-х мерную) систему координат. Далее записываются проекции 2-го закона Ньютона на оси выбранной системы координат; тем самым получается система 2-х или 3-х дифференциальных уравнений второго порядка для последующего расчета координат движущегося тела в заданные моменты времени. Здесь же задаются начальные условия задачи, т.е. начальные координаты и проекции начальных скоростей.

### 2.3. Выбор метода численного решения

Методов численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений много. Можно использовать любой из них, обеспечивающий хорошую точность при достижении малых затрат машинного времени. Рекомендуется использовать метод Рунге-Кутты 4-го порядка для решения дифференциального уравнения 2-го порядка вида

$$x'' = f(t, x, x') \quad \text{при} \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_{x0}:$$

$$x_{k+1} = x_k + x'_k \cdot \Delta t + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \cdot \Delta t,$$

$$x'_{k+1} = x'_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{где}$$

$$k_1 = f(t_k, x_k, x'_k) \cdot \Delta t,$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2}, x'_k + \frac{k_1}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4} \cdot \Delta t, x'_k + \frac{k_2}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_4 = f\left(t_{k+1}, x_k + x'_k \cdot \Delta t + \frac{k_2}{2} \cdot \Delta t, x'_k + k_3\right) \cdot \Delta t.$$

Для системы из 2-х дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, y, x', y') & \text{при} \\ y'' = g(t, x, y, x', y') \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, x'(0) = v_{x0}, \\ y(0) = y_0, y'(0) = v_{y0} \end{cases}$$

порядок расчета координат и скоростей на  $k+1$ -ом шаге по времени следующий:

$$k_{1x} = f(t_k, x_k, y_k, x'_k, y'_k) \cdot \Delta t,$$

$$k_{1y} = g(t_k, x_k, y_k, x'_k, y'_k) \cdot \Delta t,$$

$$k_{2x} = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2}, y_k + y'_k \cdot \frac{\Delta t}{2}, x'_k + \frac{k_{1x}}{2}, y'_k + \frac{k_{1y}}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_{2y} = g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2}, y_k + y'_k \cdot \frac{\Delta t}{2}, x'_k + \frac{k_{1x}}{2}, y'_k + \frac{k_{1y}}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_{3x} = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_{1x}}{4} \cdot \Delta t, y_k + y'_k \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_{1y}}{4} \cdot \Delta t, x'_k + \frac{k_{2x}}{2}, y'_k + \frac{k_{2y}}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_{3y} = g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, x_k + x'_k \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_{1x}}{4} \cdot \Delta t, y_k + y'_k \cdot \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_{1y}}{4} \cdot \Delta t, x'_k + \frac{k_{2x}}{2}, y'_k + \frac{k_{2y}}{2}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_{4x} = f\left(t_{k+1}, x_k + x'_k \cdot \Delta t + \frac{k_{2x}}{2} \cdot \Delta t, y_k + y'_k \cdot \Delta t + \frac{k_{2y}}{2} \cdot \Delta t, x'_k + k_{3x}, y'_k + k_{3y}\right) \cdot \Delta t,$$

$$k_{4y} = g\left(t_{k+1}, x_k + x'_k \cdot \Delta t + \frac{k_{2x}}{2} \cdot \Delta t, y_k + y'_k \cdot \Delta t + \frac{k_{2y}}{2} \cdot \Delta t, x'_k + k_{3x}, y'_k + k_{3y}\right) \cdot \Delta t,$$

$$x_{k+1} = x_k + x'_k \cdot \Delta t + \frac{1}{6} \cdot (k_{1x} + k_{2x} + k_{3x}) \cdot \Delta t,$$

$$x'_{k+1} = x'_k + \frac{1}{6} \cdot (k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}),$$

$$y_{k+1} = y_k + y'_k \cdot \Delta t + \frac{1}{6} \cdot (k_{1y} + k_{2y} + k_{3y}) \cdot \Delta t,$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \frac{1}{6} \cdot (k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}).$$

При движении в 3-х мерном пространстве следует добавить формулы и члены с  $z_k$  и  $z'_k$ .

Шаг по времени  $\Delta t$  выбирается в два этапа. Сначала оценивается его грубое значение, как  $0.001 \div 0.01$  от характерного времени задачи (периода обращения, периода колебаний и т.д.). Далее  $\Delta t$  уточняют из пробных расчетов по программе таким образом, что в случае отсутствия сопротивления атмосферы или сил трения закон сохранения механической энергии для всех моментов времени выполнялся с точностью не хуже 1–2 %.

Пробные расчеты могут быть проведены в пакете Mathematica. Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем хорошо работает функция *NDSolve*. Она выдает результат неявно в виде интерполяционного многочлена, который с помощью функции *Evaluate* преобразуется в вид, используемый для построения графиков или в других расчетах (подробнее см. Help).

*Пример:*

$$s = \text{NDSolve}[\{x''[t] == -g \cdot R^2 \cdot x[t] / (x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2},$$

$$y''[t] == -g \cdot R^2 \cdot y[t] / (x[t]^2 + y[t]^2)^{3/2}\},$$

$$\{x[0] == x_0, y[0] == y_0, \{x'[0] == V_{x0}, y'[0] == V_{y0}\}, \{x, y\}, \{t, 0, t_{\max}\}]$$

$$\text{ParametricPlot}[\text{Evaluate}[\{x[t], y[t]\}/s], \{t, 0, t_{\max}\},$$

$$\text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$$

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\{x[t]\}/s], \{t, 0, t_{\max}\}]$$

Здесь решается кеплерова задача.



## 2.4. Составление программы расчетов

Программа должна иметь удобный интерфейс для ввода и изменения параметров задачи, а также для вывода результатов. Наиболее удобно представлять движение тела в виде «мультфильма», показывая траекторию за предыдущие моменты времени. Кадры «мультфильма» можно выводить на экран через один или несколько шагов по времени, добиваясь движения без заметных рывков.

## 2.5. Тестирование программы

Для проверки правильности работы программы следует подобрать или изменить начальные условия задачи таким образом, чтобы получить движение, известное из практики. Например, движение спутника вокруг Земли с первой космической скоростью, перпендикулярной радиус-вектору, должно происходить по круговой орбите.

Выполнение законов сохранения энергии, импульса, момента импульса (при условиях, когда они должны выполняться) является важнейшим критерием правильности работы программы.

**Для всех задач показывать на отдельных графиках зависимости потенциальной, кинетической и полной механической энергии тела от времени.**

## 2.6. Составление отчета по выполненной работе

Отчет должен содержать следующие разделы.

1. Титульный лист.
2. Формулировка задачи (1-2 абзаца текста без формул, излагающие суть поставленной задачи).
3. Физическая постановка задачи (используемые физические законы, записанные с помощью формул, сопровождаемые рисунком и пояснениями).
4. Математическая постановка задачи (формулы численных методов, используемые для последующего программирования, указание выбранных интервалов задаваемых и рассчитываемых физических

- величин, обоснование выбора параметров задачи, описание контроля параметров для получения заданной точности).
5. Алгоритм программы, описанный либо в виде структурной блок-схемы, состоящей из крупных блоков, отражающих основные этапы решения, либо в виде перечисления последовательности этих этапов.
  6. Результаты тестирования программы в виде графиков, таблиц, диаграмм, полученных при наиболее характерных для данной задачи исходных данных, и подтверждающие правильность решения. Все иллюстративные материалы должны иметь подписи, кратко характеризующие рисунок или график. На осях графиков должны быть указаны соответствующие физические величины и единицы их измерения.
  7. Другие интересные, с вашей точки зрения, результаты расчетов и их обсуждение.
  8. Выводы по проделанной работе.
  9. Список используемой литературы.

Отчет может быть оформлен в MS WORD. В него могут быть импортированы рисунки из графического редактора Paint, или других средств визуализации, таблицы и графики из Excel и т.д. Примерный объем отчета - 5–6 страниц формата А4. В зависимости от особенностей задачи указанные выше пункты могут быть частично опущены или дополнены другими по вашему усмотрению.

### 3. ЗАДАЧИ

*Методические указания к задачам, в которых рассматривается сопротивление среды движению тела.*

Как известно, сила сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  жидкой или газообразной среды зависит от скорости тела  $V$  относительно среды. При ламинарном обтекании справедлив закон Стокса ( $F_{\text{сопр}} \sim V$ ), при турбулентном обтекании

обычно выполняется закон Ньютона ( $F_{\text{сопр}} \sim V^2$ ). На практике, чаще всего, силу сопротивления вычисляют по формуле

$$F_{\text{сопр}} = \frac{C_d \rho S V^2}{2}, \quad (1)$$

где  $C_d$  - коэффициент лобового сопротивления,  $\rho$  - плотность среды,  $S$  - максимальная площадь поперечного сечения, перпендикулярного вектору скорости, (т.н. миделева сечения). Степень турбулентности определяется безразмерным числом Рейнольдса  $Re = \rho D V / \eta = D V / \nu$ , где  $D$  - характерный размер тела (для шара, трубы - диаметр),  $\eta$  - вязкость среды,  $\nu$  - кинематическая вязкость. Считается, что при  $Re < 1$  обтекание ламинарное, при  $Re > Re_{\text{критическое}}$  - турбулентное. Критическое значение числа Рейнольдса для газов лежит в диапазоне 100 - 1000, для жидкостей 2000-20000.

Коэффициент  $C_d$  зависит от формы тела и числа Рейнольдса (особенно сильно при ламинарном обтекании). Для точных расчетов  $C_d$  выбирают из экспериментальных графиков  $C_d = f(Re)$  (см. Приложение). Для тяжелых шаров, артиллерийских снарядов, ракет, летящих вблизи поверхности Земли со скоростями десятки - сотни м/с  $C_d = 0.1 - 0.5$ .

Параметры атмосферы (давление, плотность, температура, вязкость, кинематическая вязкость в зависимости от высоты) регламентируются международной Стандартной атмосферой. Таблицу для нее легко найти в Интернете.

### 3.1. Затяжной прыжок парашютиста

Смоделировать вертикальное падение парашютиста с высоты в несколько километров с нулевой начальной скоростью. Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, но коэффициенты пропорциональности сильно отличаются на участках до раскрытия парашюта (1) и после раскрытия (2).

Известно, что при затяжном прыжке с нераскрытым парашютом предельная скорость падения для человека массой 70 – 80 кг составляет 50–60 м/с. Из этого условия можно подобрать первый коэффициент

пропорциональности. Второй коэффициент можно найти из условия, что скорость при приземлении не превышала бы 5 - 7 м/с.

Показывать движение парашютиста, графики зависимости высоты и скорости от времени. Определить, на какой минимальной высоте и через какое время после начала прыжка следует раскрывать парашют, чтобы приземление было безопасным. Оценить среднюю степень перегрузки за первую секунду после раскрытия парашюта. Плотность атмосферы считать постоянной.

### 3.2. Подъем воздушного шара в стратосферу \*)

Пусть имеется упруго наполненный водородом шар с растягивающейся оболочкой, масса которой 1 кг. На поверхности Земли температура составляет  $T_0 = 15$  °С, давление  $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$  Па.

1. Исходя из Стандартной атмосферы, определить объем шара и массу водорода в нем, чтобы начальная подъемная сила (сила Архимеда) в  $k = 10$  раз превосходила силу тяжести оболочки и водорода в ней.

2. Вывести зависимость давления и плотности воздуха от высоты, предполагая, что температура линейно уменьшается с высотой по закону  $T = T_0 - \alpha \cdot h$ , где  $\alpha = 6.5 \cdot 10^{-3}$  К/м для высот до 15 км. Для этого рассмотреть дифференциальное уравнение  $dP = -\rho g \cdot dh$ , считая зависимость плотности  $\rho$  от давления как для идеального газа ( $\rho = PM/RT$ ,  $M$  - молярная масса воздуха,  $R$  - газовая постоянная).

3. Показать, что при растягивающейся оболочке, давление внутри которой совпадает с давлением снаружи, подъемная сила не зависит от высоты.

-----

\*) В 2002 году японский шар-зонд из полиэтиленовой пленки массой 35 кг с полезной нагрузкой 5 кг достиг рекордной высоты 53 км. Максимальный диаметр шара составил 50 метров. Журнал "Квант", 2007, № 1, стр. 9.

4. Смоделировать движение шара при условии, что сила сопротивления вычисляется по формуле (1); в разреженном газе коэффициент лобового сопротивления зависит от многих факторов и при числе  $Re > 10^5$  для шара  $C_d = 0.3 - 0.4$ . Оценить число Рейнольдса на разных высотах. Сделать вывод о возможности применения этой формулы.

Показывать движение шара, графики зависимости скорости от времени, диаметра шара от времени.

5. Определить, на какой высоте шар разорвется, если материал оболочки допускает увеличение диаметра шара не более, чем в 2 раза.

### 3.3. Вертикальный полет ракеты

Ракета массой 2 тонны, включая 800 кг топлива, стартует с поверхности Земли вертикально вверх. Топливо сгорает за 30 секунд, обеспечивая постоянную силу тяги. Удельный импульс топлива  $p_{уд}$  составляет 250 секунд (удельный импульс - импульс массы  $m_T$  топлива, отнесенный к его весу  $m_T g$ ; средняя сила тяги за время сгорания равна  $m_T g \cdot p_{уд} / t_{сгор}$ ).

Составить дифференциальное уравнение движения ракеты как тела с переменной массой (уравнение Мещерского). Учесть влияние сопротивления воздуха (см. формулу (1)). Взять диаметр поперечного сечения 0.65 м, коэффициент лобового сопротивления  $C_d$  в пределах 0.3-0.5. Считать атмосферу изотермической при температуре  $-20^\circ\text{C}$ . Плотность воздуха рассчитывать по барометрической формуле.

Смоделировать движение ракеты от старта до момента падения на Землю. Исследовать зависимости максимальной высоты, скорости и ускорения от параметров задачи - коэффициента лобового сопротивления, времени сгорания топлива, отношения массы топлива к начальной массе ракеты. Показывать движение ракеты, графики высоты, скорости и ускорения в зависимости от времени.

### 3.4. Движения шара с учетом сопротивления воздуха

Смоделировать движение шара радиуса  $R$  и массы  $m$  вблизи поверхности Земли с учетом влияния атмосферы при постоянной ее плотности. Рассмотреть движение по прямой, а также в случае шара, брошенного под углом к горизонту. На одном графике разными цветами показывать траектории с учетом влияния атмосферы и без учета влияния. Силу сопротивления рассчитывать по формуле (1).

Показывать график зависимости скорости от времени. Исследовать зависимость предельной скорости шара при вертикальном падении от массы и диаметра.

Некоторые экспериментальные данные для подбора коэффициента лобового сопротивления при вертикальном падении:

- стальной шар, масса 10 кг,  $V_{\text{макс}}=142$  м/с; радиус 67 мм,  $C_d = 0.4$ ;
- свинцовый шар, масса 10 г,  $V_{\text{макс}}=40$  м/с, радиус 6 мм,  $C_d = 0.92$ .

### 3.5. Движения артиллерийских снарядов в реальных условиях

Смоделировать движение снаряда в реальной атмосфере в неинерциальной системе отсчета, связанной с Землей (рис. 1). Учесть сопротивление воздуха. Плотность воздуха вычислять по барометрической формуле при температуре  $-20^\circ\text{C}$ . Начало неинерциальной декартовой системы координат взять на некоторой широте  $s$  в северном полушарии. Одну из осей направить по меридиану, другую - вертикально. Параметры выстрела:  $V_0$  - начальная скорость снаряда,  $\alpha$  - азимут,  $\varphi$  - угол возвышения ствола к горизонту. Рассмотреть углы возвышения не более  $45^\circ$ .

Показывать траектории в плоскостях  $oxz$  и  $oAz$ . Сравнить траектории при учете вращения Земли и без учета вращения. Выяснить условия, при которых учет вращения Земли дает максимальное отклонение. Сопротивление воздуха считать пропорциональным квадрату скорости (формула (1)). Параметры каких-либо реальных пушек и снарядов, коэффициент  $C_d$  для сверхзвуковых скоростей найти в Интернете.

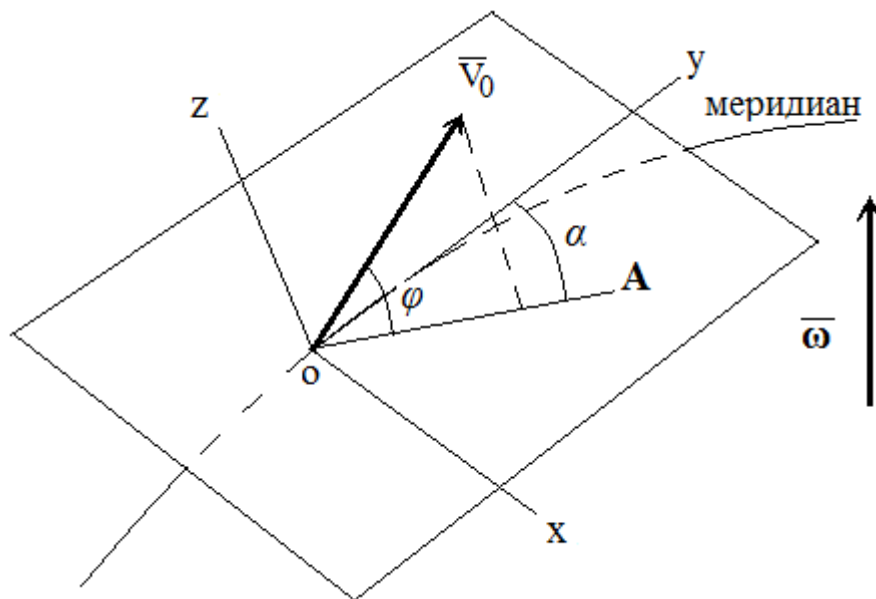


Рис. 1. Выбор системы координат в задаче 3.5.  $\overline{\omega}$  - угловая скорость Земли

### 3.6. Стрельба из дальнобойного орудия

Смоделировать движение снаряда, выпущенного из гаубицы со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, учитывая сопротивление воздуха. Силу лобового сопротивления рассчитывать по формуле (1). Плотность атмосферы рассчитывать по барометрической формуле для температуры  $-20$  °С. Вращением Земли пренебречь. Для артиллерийских снарядов  $C_d$  зависит от скорости, формы и размеров снаряда, шероховатости их поверхности (даже окраски) и лежит в диапазоне 0.3 - 0.5.

1. Показывать траекторию снаряда, зависимость скорости от времени. Исследовать зависимость дальности полета от начальных условий. Подобрать параметр  $C_d$  из сравнения расчетной и реальной максимальной дальности стрельбы для какого-нибудь снаряда (можно найти в Интернете; например, для 152-мм гаубицы при массе снаряда 43.56 кг и  $V_0 = 655$  м/с максимальная дальность составляет 17.2 км).

2. Известно, что в 1918 г. немцы обстреливали Париж из гаубицы "Коллосаль" с расстояния примерно 100 км. Подобрать начальные условия

для достижения такой дальности. Чем такое орудие отличалось от обычных пушек? И почему в современных условиях рекордная дальность даже при стрельбе реактивными управляемыми снарядами не превышает 80 км? Например, для российской гаубицы "Коалиция" (калибр 152 мм, ствол длиной 8 м), заявленная дальность стрельбы реактивными снарядами составляет 80 км, а обычными снарядами - до 40 км.

### 3.7. Удар на поле для гольфа

Смоделировать полет маленького мяча из т. О через отверстие АВ в стене так, чтобы он попал в лунку CD (рис. 2). Учитывать сопротивление воздуха с силой  $F_{\text{сопр}} = k \cdot V^2$ , где  $V$  скорость мяча. Определить диапазон начальных скоростей  $V_0$  и углов  $\alpha$ , при которых это возможно при заданных размерах  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $d$ ,  $h$ , значения которых подобрать исходя из здравого смысла.

Показывать движение мяча, график зависимости скорости от времени. Коэффициент пропорциональности  $k$  найти из условия, что дальность полета мяча при учете сопротивления воздуха примерно в  $n = 1.5$  раза меньше, чем без учета. Зависит ли параметр  $n$  от начальных условий?

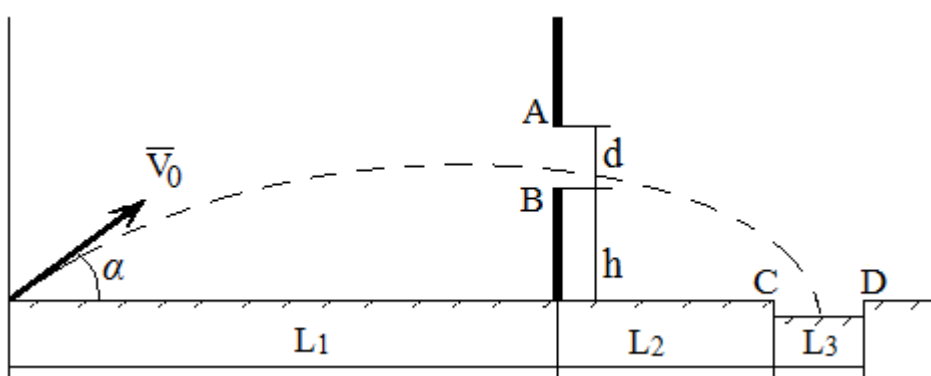


Рис. 2. Схема полета мяча в задаче 3.7



### 3.8. Шарик подо льдом

Шарик радиусом  $R$  изо льда, плавающий в воде в проруби АВ, толкнули со скоростью  $V_0$ , как показано на рис. 3.

1. Смоделировать движение шарика в предположении, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости, т.е. подчиняется закону Стокса.

Показывать движение шарика, график зависимости скорости от времени. Подобрать начальную скорость  $V_0$  и угол  $\alpha$  так, чтобы шарик мог всплыть в проруби CD. Исследовать возможность такого движения при  $BC$  примерно 1 метр при ламинарном обтекании, диаметре шарика 1 см и начальной скорости 1 м/с (т.е. проанализировать число Рейнольдса).

2. Смоделировать движение шарика в предположении, что сила сопротивления воды пропорциональна квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности  $k = C_d \cdot S \cdot \rho / 2$ , где  $\rho$  - плотность воды,  $S$  - максимальная площадь сечения шара ( $\pi r^2$ ),  $C_d$  - коэффициент лобового сопротивления шара; при небольших скоростях он слабо зависит от числа Рейнольдса и равен примерно 0.4 - 0.45. Дополнительно к п. 1 исследовать глубину максимального погружения шарика в зависимости от начальной скорости при  $\alpha = 90^\circ$

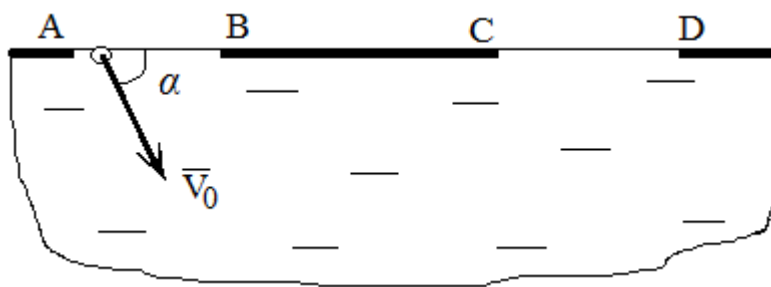


Рис. 3. К задаче 3.8

### 3.9. Полет тактической неуправляемой ракеты

Используя условия задачи 3.3, смоделировать полет ракеты, запущенной под углом  $\alpha$  к горизонту. Исследовать зависимость максимальной дальности полета от коэффициента лобового сопротивления, времени сгорания топлива, а также температуры. Определить разброс дальности при изменении этих параметров на  $\pm 1\%$ . Показывать траекторию

движения, зависимость скорости от времени. Сделать вывод о преимуществе управляемых ракет.

### 3.10. Демонстрация эффекта Магнуса

Легкий бумажный цилиндр радиусом  $r$  и длиной  $L \gg r$  скатывается с наклонной плоскости без скольжения (рис. 4). В момент отрыва от плоскости он имеет скорость центра масс  $V_0$ . Смоделировать движение цилиндра с учетом силы сопротивления воздуха и эффекта Магнуса.  $F_{\text{сопр}}$  рассчитывать по формуле (1); коэффициент лобового сопротивления принять  $C_d = 0.8$ . Сила Магнуса может быть определена по формуле

$$\bar{F}_M = k \rho r^2 L \bar{\omega} \times \bar{V}$$

где  $\rho$  - плотность воздуха,  $V$  - скорость центральной оси цилиндра относительно воздуха,  $\omega$  - угловая скорость вращения цилиндра. Для длинного цилиндра при небольших скоростях коэффициент пропорциональности  $k$  считают равным  $\pi$ .

Показывать движение цилиндра в вертикальной плоскости, графики координат  $x, y$  от времени. Исследовать траекторию в зависимости от массы и скорости  $V_0$ . Рассмотреть два случая: 1. угловая скорость вращения остается постоянной; 2. угловая скорость уменьшается линейно со временем (коэффициент пропорциональности подобрать при пробных расчетах).

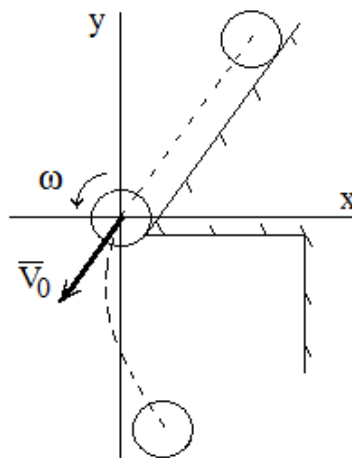


Рис. 4. Демонстрация эффекта Магнуса

### 3.11. Крученный удар

По футбольному мячу радиусом  $r$  и массой  $m$  бьют с угла футбольного поля так, что мяч приобретает скорость  $V_0$  и закручивается относительно вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Направление вектора начальной скорости определяется углами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 5).

1. Смоделировать движение мяча при постоянной угловой скорости с учетом силы сопротивления воздуха и эффекта Магнуса.  $F_M$  рассчитывать по формуле

$$\vec{F}_M = k\rho r^3 \vec{\omega} \times \vec{V},$$

где  $\rho$  - плотность воздуха,  $V$  - скорость мяча относительно воздуха. В настоящее время не существует точного теоретического описания этого явления. Коэффициент  $k$  в основном зависит от числа Рейнольдса и отношения скоростей  $V/\omega$  (см., например, [element.ru/novostinauki/431459](http://element.ru/novostinauki/431459)) и находится экспериментально. В нашем случае можно взять  $2 < k < 3$ . Показывать движение мяча в горизонтальной плоскости, графики координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от времени. Оценить подбираемое значение коэффициента  $k$  из сравнения результатов моделирования с футбольной практикой.

2. Подобрать несколько значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ , чтобы мяч попал в ворота при  $20 < V_0 < 40$  м/с. Для реальных мяча и поля:  $m = 0.41$  кг  $r = 0.11$  м,  $a = 30$  м,  $b = 7.32$  м,  $h = 2.44$  м.

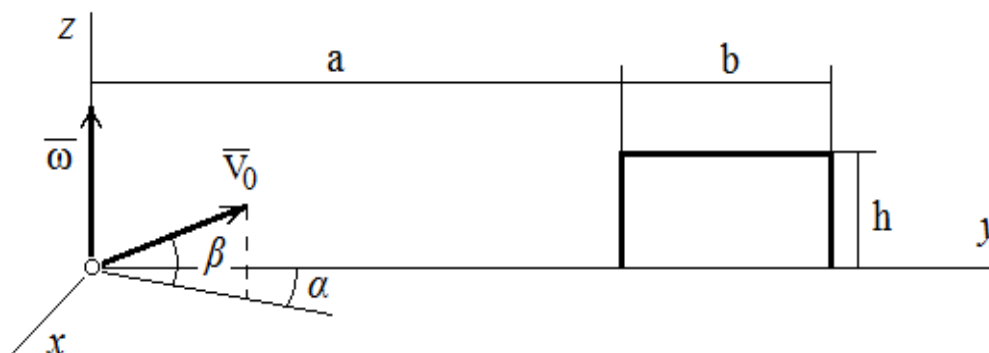


Рис. 5. Схема полета мяча в задаче 3.11

(Для футбольных мячей, использовавшихся на разных чемпионатах мира, проводились исследования зависимости  $C_d$  от числа Рейнольдса. Реально эти зависимости ближе к ступенчатой форме.

См. <https://www.comsol.ru/blogs/magnus-effect-world-cup-match-ball/>)

### 3.12. Проверка второго закона Кеплера

Второй закон Кеплера формулируется так. «При движении планеты вокруг Солнца по эллиптической орбите прямая, соединяющая Солнце и планету, за равные промежутки времени заметает одинаковые площади» (рис. 6).

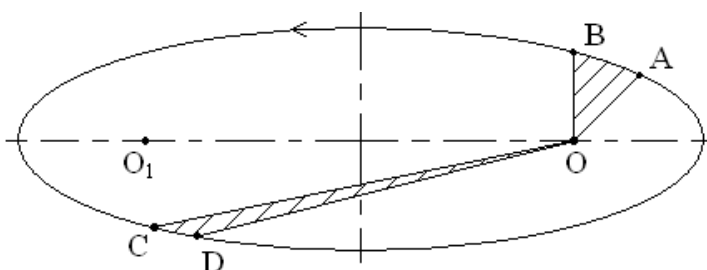


Рис.6. Площади секторов  $OAB$  и  $OCD$  равны. По первому закону Кеплера Солнце находится в одном из фокусов эллипса, в т.  $O$  или в т.  $O_1$ .

Для проверки второго закона смоделировать движение спутника вокруг Земли, пренебрегая воздействием всех других небесных тел. Подобрать начальные координаты и начальную скорость спутника так, чтобы получилось 2 - 3 эллиптические орбиты с различными эксцентриситетами. На этих орбитах выбрать точки  $A, B, C, D$  (лучше, если  $A$  и  $B$  будут находиться вблизи одного конца большой полуоси, а  $C$  и  $D$  – вблизи другого конца). Численным интегрированием определить площади секторов  $OAB$  и  $OCD$ , а также времена  $t_{AB}$  и  $t_{CD}$  прохождения участков  $AB$  и  $CD$ . Сравнить отношения  $S_{OAB}/t_{AB}$  и  $S_{OCD}/t_{CD}$  для разных орбит и разных положений точек  $A, B, C, D$ .

Показывать Землю и траекторию спутника. Исследовать точность выполнения закона в зависимости от эксцентриситета орбиты.

### 3.13. Проверка третьего закона Кеплера

Третий закон Кеплера формулируется так. «Для всех планет, вращающихся вокруг Солнца, отношение  $T^2/a^3$  одинаково ( $T$  - период обращения,  $a$  - большая полуось эллипса)». Для его проверки смоделировать движение спутника вокруг Земли, пренебрегая воздействием всех других небесных тел. Подобрать начальные координаты и начальную скорость спутника так, чтобы получилось несколько разных эллиптических орбит. Для каждой орбиты определить полную энергию и момент импульса  $L_z$  (в относительных единицах), большую и малую полуоси, эксцентриситет ( $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ), период обращения. Проверить постоянство отношения  $T^2/a^3$ . Показывать Землю и траекторию движения спутника.

### 3.14. Моделирование силы «гравитационного» взаимодействия, не пропорциональной обратному квадрату

Пусть между телами действует гипотетическая центральная сила притяжения  $F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^{2+\delta}}$ , где  $\delta$  – малая величина (например,  $\delta \sim 0.05$ ).

1. Смоделировать движение планеты вокруг звезды при таком законе взаимодействия. Задать начальные условия, при которых при  $\delta = 0$  движение планеты происходило бы по окружности. Если при этих условиях взять  $\delta \neq 0$ , то окажется, что орбита планеты не будет замкнутой. Исследовать изменение орбиты от величины и знака  $\delta$ .
2. Возьмите  $\delta = 1$ . Найдите начальные условия, соответствующие круговой орбите при  $\delta = 1$ . Насколько малым должен быть шаг по времени  $\Delta t$ , что круговая орбита сохранялась бы в течение нескольких периодов?
3. Измените  $V(t=0)$  примерно на 2% по сравнению с условиями для круговой орбиты из п. 2. Исследуйте новую орбиту при уменьшении и увеличении  $V(t=0)$ . Выполняется ли закон сохранения энергии при таком законе  $F(r)$ ?

Попробуйте придумать какую-нибудь экспериментальную установку, соответствующую такой силе взаимодействия.

### 3.15. Моделирование движения двух планет вокруг Солнца

Пусть две планеты движутся вокруг неподвижного Солнца в одной плоскости.

1. Рассчитать и показать траектории планет в течение нескольких периодов, взяв  $m_1/M=0.01$ ,  $m_2/M=0.001$  ( $M$  - масса Солнца,  $m_1$ ,  $m_2$  - массы планет), при различных начальных условиях.
2. Выяснить влияние планет на траектории друг друга, показывая одновременно и их траектории, рассчитанные без учета взаимодействия.
3. Смоделировать реальное движение Юпитера и Земли вокруг Солнца при нескольких различных начальных положениях планет относительно друг друга. Определить максимальное отклонение (в процентах) траектории Земли, полученной без учета взаимного притяжения. (Массы: Солнца  $M_C=1.99 \cdot 10^{30}$  кг, Юпитера  $M_{Ю}=1.90 \cdot 10^{27}$  кг, Земли  $M_3=5.96 \cdot 10^{24}$  кг, среднее расстояние от Солнца: до Земли  $r_3=149.5 \cdot 10^6$  км, до Юпитера  $r_{Ю}=778 \cdot 10^6$  км. Параметры реальных эллиптических орбит найти в Интернете).

### 3.16. Движение одной планеты в поле тяготения двух звезд

Смоделировать движение планеты, подобной Земле, в поле тяготения двух неподвижных звезд. В этом случае никаких замкнутых орбит не существует, но все орбиты можно разделить на устойчивые и неустойчивые. Устойчивыми орбитами могут быть открытые петли, охватывающие обе звезды, орбиты в виде восьмерки или кеплеровские орбиты вокруг только одной звезды. В случае неустойчивых орбит планета, в конце концов, упадет на одну из звезд.

Исследовать возможные орбиты в зависимости от начального положения и начальной скорости планеты, а также от соотношения масс между звездами. Подобрать не менее 8 различных начальных условий для планеты, приводящих к наиболее интересным орбитам.

Можно выбрать массы звезд, не сильно отличающиеся от массы Солнца, а расстояние между ними взять равным большой оси земной орбиты.

### 3.17. Влияние Солнца и Луны на движение ИСЗ

Смоделировать движение искусственного спутника Земли (ИСЗ) с учетом влияния Луны и Солнца. Считать Землю, Луну, Солнце неподвижными. Расположить спутник и небесные тела в одной плоскости. Выбрать несколько начальных условий при различных положениях Луны относительно прямой Земля - Солнце. Рассмотреть спутник на орбите около Земли (как МКС), на геостационарной орбите и на сильно вытянутой эллиптической орбите с большой осью примерно в 100000 км. Показывать разными цветами траектории спутника с учетом влияния Луны и Солнца и без учета этого влияния.

### 3.18. Запуск с Земли спутника на орбиту вокруг Луны

В неподвижной системе отсчета, связанной с центром Земли, смоделировать запуск космического аппарата с экватора Земли в направлении Луны с целью вывести его на орбиту вокруг Луны. Считать Луну неподвижной и расположенной в плоскости эклиптики. Учесть вращение Земли. Пренебречь влиянием атмосферы Земли. Подобрать оптимальную начальную скорость, угол между вектором скорости и вертикалью и положение на экваторе по отношению к прямой Земля - Луна. Возможно ли достижение заданной цели без дополнительной коррекции орбиты спутника вблизи Луны?

Показывать движение аппарата. При приближении к Луне масштаб картинки можно изменить, чтобы движение вблизи Луны было более наглядным (или выводить сразу 2 картинки в разных масштабах).

### 3.19. Влияние «солнечного ветра» на движение спутника вокруг Земли

Пусть на спутник, движущийся вокруг Земли, действует постоянная по величине и направлению сила  $\vec{F}$ , обусловленная «солнечным ветром» (рис. 7).

1. Смоделировать движение спутника по круговой или эллиптической орбите без учета «солнечного ветра» при нескольких начальных условиях.

2. При тех же начальных условиях учесть влияние «солнечного ветра». Значение силы  $F$  взять равным нескольким процентам от силы тяжести спутника на поверхности Земли.

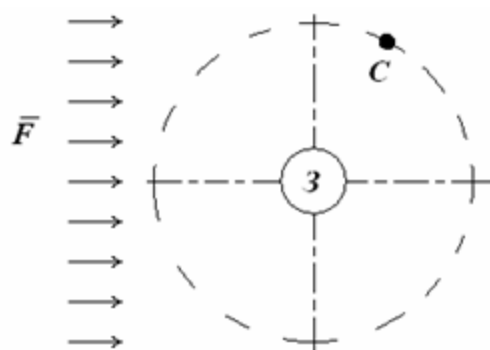


Рис. 7. З – Земля, С – спутник,  $\bar{F}$  – «солнечный ветер» в плоскости орбиты

Орбиты спутника для пунктов 1 и 2 показывать одновременно в течение нескольких периодов. Рассмотреть два случая: а) орбита спутника лежит в плоскости Земля-Солнце, как на рис. 7 (можно учесть и отсутствие силы  $\bar{F}$ , когда спутник входит в тень от Земли); б) орбита спутника перпендикулярна прямой Земля-Солнце. Здесь надо показывать трехмерную картинку, либо ее проекцию в 2-х плоскостях.

Оценить реальную силу «солнечного ветра», действующую на зеркальный диск площадью  $100 \text{ м}^2$ , с плоскостью, перпендикулярной  $\bar{F}$ .

### 3.20. Маневрирование космического корабля на орбите

Пусть первоначально корабль движется вокруг Земли по круговой или эллиптической орбите.

1. Смоделировать один период такого движения.
2. После этого на время  $t_1$  «включить» двигатель, который действует на корабль с силой  $F = k \cdot G$  ( $G$  - вес корабля на поверхности Земли). Рассмотреть все 4 случая направления силы  $\bar{F}$  - по и против скорости, перпендикулярно скорости к Земле и от Земли. Параметры  $t_1$ ,  $k$  изменять в разумных пределах (можно поискать в Интернете реальные данные). Проследить движение корабля еще в течение 1 - 2 оборотов. Показывать



Землю, траекторию полета и график зависимости скорости от времени. Сделать вывод о наиболее рациональном поднятии орбиты.

### 3.21. Спуск космического корабля с орбиты с учетом земной атмосферы

1. Пусть космический корабль движется по круговой или эллиптической орбите вокруг Земли на таком расстоянии от нее, что сопротивлением атмосферы можно пренебречь.

а) Смоделировать 1 - 2 оборота такого движения.

б) После этого «включить» на время  $t_1$  постоянную силу торможения, направленную против скорости, и составляющую 0.1 - 0.2 от силы тяжести (изменение массы корабля из-за работы двигателя не учитывать).

в) Далее до падения на Землю учитывать силу лобового сопротивления атмосферы  $F_c = k\rho V^2$ , где  $k = \text{const}$ ,  $\rho$  - плотность атмосферы на текущей высоте,  $V$  - скорость корабля. Плотность атмосферы рассчитывать по барометрической формуле, приняв температуру постоянной и равной  $-50^\circ\text{C}$ . Параметры  $t_1$  и  $k$  подбирать так, чтобы корабль приземлился не более чем за один оборот после начала торможения.

2. Смоделировать спуск космического тела, приближающегося к Земле из бесконечности со скоростью  $V$  и прицельным параметром  $p$  (рис. 8) при таком же влиянии атмосферы. Значения  $p$  и  $V$  варьировать в разумных пределах. Показывать Землю, траекторию полета и график зависимости скорости от времени.

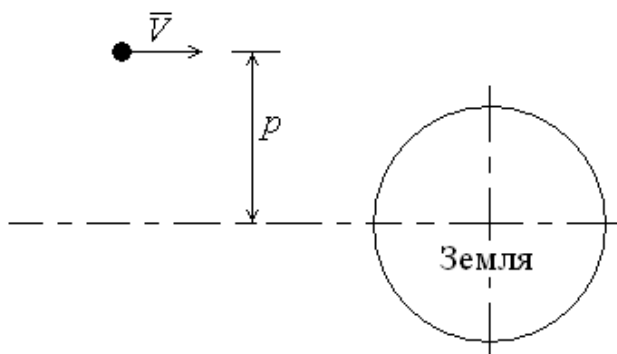


Рис. 8. Падение космического тела на Землю из бесконечности.

$p$  – прицельный параметр

### 3.22. Торможение спутника в верхних слоях атмосферы

Пусть первоначально спутник в форме шара диаметром 1 м и массой 1000 кг движется вокруг Земли по круговой орбите на высоте  $h_0$ .

1. Смоделировать один период такого движения без учета сопротивления воздуха. Проверить выполнение закона сохранения энергии.

2. После этого при расчете траектории учитывать силу сопротивления

разреженной атмосферы по формуле  $F_{\text{сопр}} = \frac{C_d \rho S V^2}{2}$ , где  $C_d$  - безразмерный

коэффициент лобового сопротивления (для разреженного газа при скорости спутника значительно большей скорости теплового движения молекул

$C_d = 2 - 2.5$ ),  $\rho$  - плотность атмосферы, почти экспоненциально зависящая от

высоты,  $V$  - скорость спутника,  $S$  - максимальная площадь поперечного сечения спутника.

Плотность атмосферы в диапазоне высот 100 - 200 км сложным образом зависит от высоты  $h$ . В Приложении приведена экспериментальная зависимость  $\rho(h)$  (полученная, кстати, из наблюдений за спуском реальных космических аппаратов на Землю). Аппроксимация логарифма этой зависимости кубической параболой  $\ln(\rho(h)) = c_0 + c_1 \cdot h + c_2 \cdot h^2 + c_3 \cdot h^3$  дает примерные коэффициенты  $c_0 = 15.05044$ ,  $c_1 = -0.4563077$ ,  $c_2 = 1.843697 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_3 = -2.356308 \cdot 10^{-6}$ , где  $\rho$  берется в кг/м<sup>3</sup>,  $h$  - в км.

Показывать траекторию спутника за несколько оборотов, график зависимости высоты от времени, график зависимости скорости от времени (при этом можно наблюдать, так называемый аэродинамический парадокс - увеличение скорости спутника при торможении). Исследовать зависимость величины снижения  $\Delta h$  за 1 оборот от времени. Рассмотреть несколько вариантов начальной высоты  $h_0$  в диапазоне 100 - 150 км.

Тщательно исследовать последний участок траектории спутника. Определить критическую высоту схода спутника с орбиты (высоту, на которой совершается последний полный виток).

3. Исследовать изменение формы орбиты спутника при начальной эллиптической орбите. Например, можно получить зависимость примерного эксцентриситета на каждом витке от числа оборотов.

### 3.23. Запуск космического спутника одноступенчатой ракетой-носителем на заданную эллиптическую орбиту

Будем считать, что запуск ракеты проводится в экваториальной плоскости Земли. За начало отсчета времени возьмем момент, когда последняя ступень ракеты-носителя массой  $m_{p0}$  вместе с топливом со спутником массой  $m_c$  находится на высоте 200 км и имеет скорость  $\bar{V}_0$  (в неподвижной системе координат), направленную под углом  $\alpha$  к горизонту. Движение ракеты со спутником описывается уравнением Мещерского

$$M \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{G} - \mu \cdot \bar{c},$$

где  $M = m_{p0} - \mu t + m_c$ ,  $\bar{G}$  – сила тяжести, действующая на спутник и ракету,  $\mu$  – скорость сгорания топлива,  $\bar{c}$  – скорость истечения газов относительно ракеты ( $\bar{c} \downarrow \uparrow \bar{V}$ ). Полное сгорание топлива и отделение спутника происходит в момент, когда  $m_p = m_c$ . Требуется подобрать  $V$  и  $\alpha$  такими, чтобы после сгорания топлива движение спутника происходило по эллиптической орбите с заданными полуосями  $a$  и  $b$ . Принять  $m_{p0} = 1000$  кг,  $m_c = 100$  кг,  $\mu = 10$  кг/с. Величину  $c$  подобрать, выводя спутник на круговую орбиту вокруг Земли с высотой 500 км.

Показывать Землю и траекторию ракеты со спутником и спутника в процессе полета в экваториальной плоскости (1 - 2 оборота).

Исследовать возможность получения эллиптических орбит с любыми  $a$  и  $b$

### 3.24. Запуск баллистической ракеты

Пусть ракета, находящаяся на поверхности Земли в т. А (например, в окрестности Нижнего Новгорода), мгновенно приобретает скорость  $\bar{V}_0$ , направленную под углами  $\alpha$  и  $\varphi$  (см. рис. 1 к задаче 5). Требуется поразить цель, находящуюся на поверхности Земли вблизи т. В с заданными

координатами  $d$  восточной или западной долготы и  $s$  северной или южной широты (например, на Камчатке). Расчет проводить в трехмерной декартовой системе координат. Необходимо подобрать значения  $\bar{V}_0$ ,  $\alpha$ ,  $\varphi$ , чтобы попасть в круг радиусом  $r = 20$  км с центром в т. В.

Учесть вращение Земли. Силу сопротивления атмосферы рассчитывать по формуле (1), а плотность атмосферы - по барометрической формуле при температуре  $-50$  °С. Показывать движение ракеты, график зависимости скорости от времени.

Траекторию в 3-х мерном пространстве можно нарисовать с использованием какого-либо графического пакета (в том числе и пакета Mathematica), а проще нарисовать на плоскости в изометрической проекции (как при взгляде на объемное тело под углом сверху), пересчитав пространственные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в координаты плоскости:

$$x_1 = y - 0.5 x \cdot \cos 45^\circ, \quad y_1 = z - 0.5 x \cdot \cos 45^\circ.$$

### 3.25. Пружинный маятник

Смоделировать движение тела массой  $m$ , скользящего под действием 2-х одинаковых невесомых пружин с жесткостью  $k$  по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 9). В равновесии пружины не деформированы.

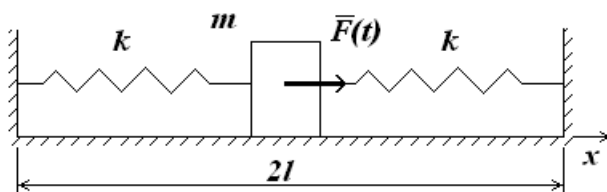


Рис. 9. Одномерный пружинный маятник.

1. Определить период колебаний при заданных числовых значениях  $k$  и  $m$ , сравнить его с теоретически полученным. Рассмотреть 2 вида начальных условий:

а) тело начинает движение из смещенного положения с нулевой начальной скоростью;

б) тело начинает движение из положения равновесия с заданной начальной скоростью.

2. Исследовать колебания при постоянной силе трения скольжения.

3. Ввести коэффициент вязкого трения  $\beta$  и исследовать затухающие колебания (считать, что сила вязкого трения пропорциональна скорости). Определить логарифмический декремент затухания и сравнить его с теоретически полученным.

4. При наличии вязкого трения задать периодическую вынуждающую силу  $F = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ . Подобрать  $F_0$  такой величины, чтобы можно было проследить процесс установления вынужденных колебаний. Исследовать зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. Построить по точкам график резонансной кривой. Определить резонансную частоту  $\omega_{рез}$  и сравнить ее с теоретической.

Показывать процесс колебаний в виде мультфильма. Выводить графики  $x(t)$ ,  $V_x(t)$ .

### 3.26. Доска на катках

Однородную доску положили на 2 быстро вращающихся катка так, как показано на рис. 10. Расстояние между осями катков равно  $L$ , коэффициенты трения скольжения между доской и катками  $k_1 = k_2 = k$ .

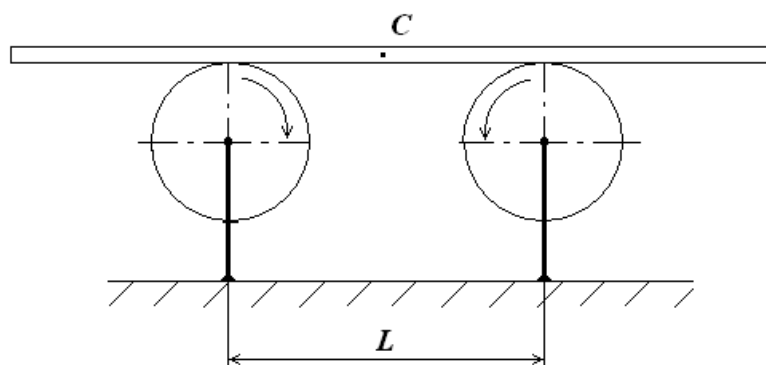


Рис. 10. Доска на вращающихся катках. Точка С - центр масс

Смоделировать движение доски. Выяснить условия, при которых движение будет периодическим и гармоническим. Найти период

гармонических колебаний, задав численные значения  $L$  и  $k$ . Сравнить его с теоретически полученным. Как изменится движение доски, если дополнительно ввести силу вязкого трения, пропорциональную скорости?

Исследовать движение доски при небольшом отличии  $k_1$  от  $k_2$ .

### 3.27. Контур с индуктивностью в магнитном поле

Катушка индуктивности  $L$  соединяет концы 2-х вертикальных медных шин, отстоящих друг от друга на расстояние  $a$  (рис.11). Вдоль шин падает без начальной скорости горизонтальный проводник - перемычка массы  $m$  - без нарушения контакта с шинами. Вся система находится в однородном магнитном поле с вектором индукции  $\vec{B}$ , перпендикулярным плоскости шин. Собственная индуктивность контура и сопротивления проводов пренебрежимо малы.

1. Смоделировать движение перемычки, построить графики  $y(t)$ ,  $i(t)$  ( $i$  - сила тока в контуре). Определить период колебаний перемычки, сравнить его с теоретическим значением.
2. Исследовать движение перемычки, если она обладает сопротивлением  $R$ .

Показывать движение перемычки, графики  $y(t)$ ,  $i(t)$ .

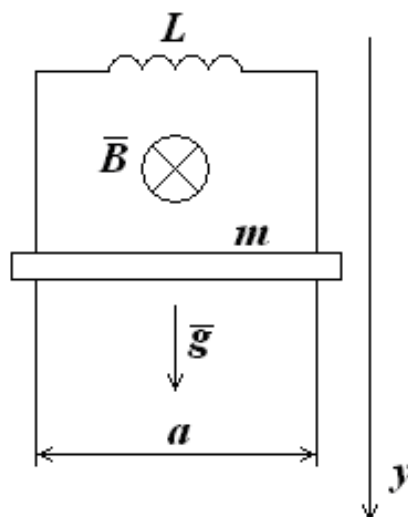


Рис. 11. Контур с индуктивностью в поле тяготения и магнитном поле

### 3.28. Земной маятник

Представим себе, что через центр Земли просверлено отверстие, в которое направляют небольшое тело (рис. 12). Смоделировать движение этого тела при различных начальных скоростях (в том числе и при скорости, направленной от Земли). Трение не учитывать. Определить период колебаний и максимальную скорость тела.

1. Считать Землю идеальным шаром с равномерно распределенной плотностью, равной средней плотности Земли.
2. Считать, что у Земли есть ядро радиусом  $R/2$  с плотностью в 2 раза превышающей плотность внешней оболочки. Значения плотностей рассчитать из условия неизменности массы Земли.
3. Считать, что плотность линейно увеличивается от  $2700 \text{ кг/м}^3$  на поверхности с уменьшением расстояния до центра. Коэффициент пропорциональности определить как в п. 2.

Для расчета напряженности гравитационного поля применить теорему Гаусса о потоке вектора  $\vec{g}$ .

(Полезно отыскать информацию в Интернете и построить график реальной зависимости плотности от глубины).

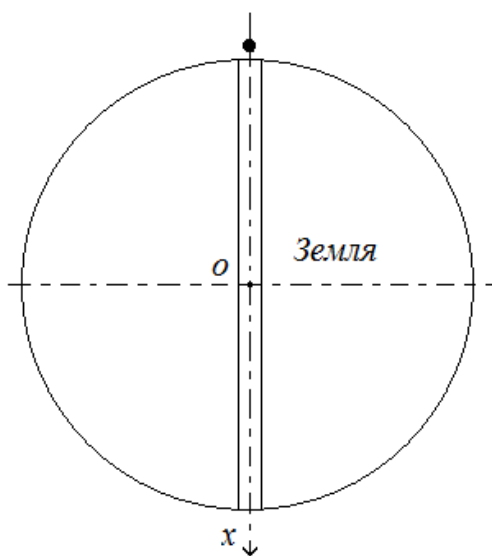


Рис. 12. Земля с воображаемым каналом через центр

### 3.29. Математический маятник при больших углах отклонения

1. Смоделировать движение математического маятника при условии, что его колебания не являются гармоническими, т.е. при больших углах отклонения. Определить период колебаний и сравнить его с теоретическим для гармонических колебаний. Рассмотреть различные начальные условия: отклонение на  $90^\circ$ , не равную нулю начальную скорость в нижнем положении (в том числе такую, чтобы шарик поднялся выше точки подвеса или мог сделать полный оборот). Показывать движение шарика, а также зависимости угла отклонения  $\varphi(t)$  - моделируемого и в предположении гармонических колебаний (на одном графике).

2. Смоделировать движение при замене нити на невесомый стержень.

#### Указания

1. При натянутой нити вместо 2-х дифференциальных уравнений для координат  $x$  и  $y$  можно записать одно дифференциальное уравнение для угла отклонения, если перейти к полярной системе координат. После этого  $x$  и  $y$  находятся из условия нерастяжимости нити.

2. При не натянутой нити нужно решать систему дифференциальных уравнений для  $x(t)$ ,  $y(t)$ , начиная с момента времени, когда нить ослабнет.

### 3.30. Груз на пружинке в горизонтальной плоскости

1. Груз массой  $m$ , прикрепленный пружинкой к шарнирной опоре в т. О, может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 13). Жесткость пружинки  $k$ , длина в нерастяннутом состоянии  $L$ . Пружинка не изгибается за счет стержня ОА, по которому груз может скользить без трения. Массой пружинки и стержня пренебречь.

Смоделировать движение груза в плоскости при  $x(0)=L$ ,  $y(0)=0$  и различных  $V_0$  и  $\alpha$ . Показывать траекторию груза, графики зависимости  $x(t)$ ,  $\omega(t)$ , где  $\omega$  - угловая скорость стержня ОА.

2. То же самое при учете сухого трения груза о плоскость с коэффициентом  $\mu$ .



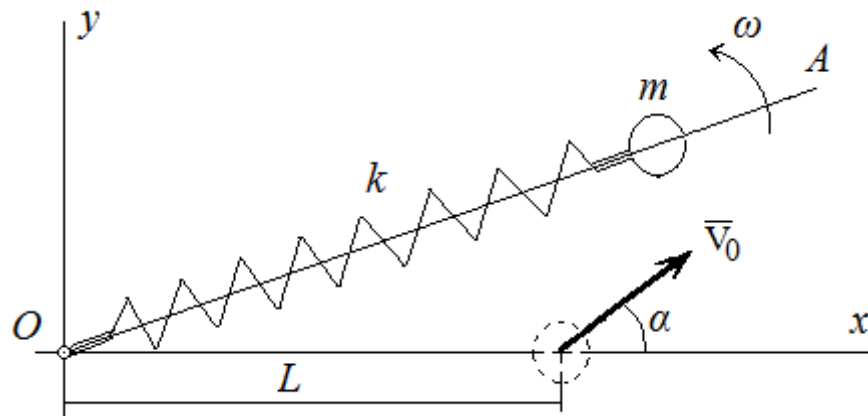


Рис. 13. Груз на пружинке в горизонтальной плоскости

### 3.31. Пружинный математический маятник

1. Смоделировать колебания шарика массой  $m$ , подвешенного на невесомой пружинке жесткостью  $k$ , длиной  $L_0$  в нерастянутом состоянии, со стержнем  $OA$ , как в задаче 30. Рассмотреть различные начальные условия. Показывать движение шарика в вертикальной плоскости, графики зависимости угла отклонения  $\varphi$  и длины пружинки  $L$  от времени. Показать движение в фазовой плоскости  $\varphi(t) - \omega(t)$ . Считать, что шарнир в опоре  $O$  цилиндрический.
2. Составить дифференциальные уравнения движения для шарика (без решения), если шарнир в опоре  $O$  сферический.

### 3.32. Двумерный осциллятор на 2-х пружинках

Тело массой  $m$  с шарнирно закрепленными невесомыми пружинками жесткостью  $k$  может скользить по гладкой горизонтальной плоскости  $oxy$  (рис. 14). В равновесии пружинки не деформированы.

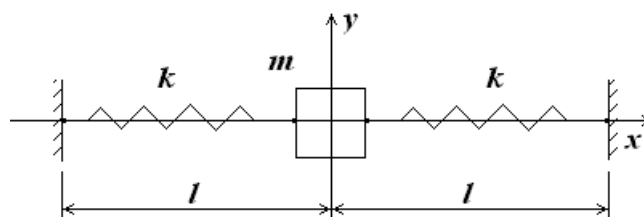


Рис. 14. Двумерный осциллятор на 2-х пружинках

1. Смоделировать движение тела при различных начальных смещениях и начальных скоростях.
2. Определить период колебаний по оси  $x$  и сравнить его с теоретическим значением.
3. Исследовать колебания вдоль оси  $y$ . Являются ли они гармоническими? По какому признаку можно определить, что колебания близки к гармоническим?
4. Исследовать движение маятника по оси  $y$ , если в момент прохождения им положения равновесия на тело будет действовать сила, мгновенно меняющая импульс тела на величину  $P$ : а) – в направлении движения; б) – против движения; в) – в положительном направлении оси  $x$ .

Показывать траекторию тела (не рисуя пружинки). Показывать зависимость координат  $x$  или  $y$  от времени, а также фазовый портрет, т.е. зависимость его координаты ( $x$  или  $y$ ) от проекции скорости ( $V_x$  или  $V_y$ ).

### 3.33. Двумерный осциллятор на 4-х пружинках

Тело массой  $m$ , шарнирно прикрепленное к 4-м невесомым пружинкам жесткостью  $k$ , может скользить по горизонтальной плоскости  $oxy$  (рис. 15). В положении равновесия пружинки не деформированы.

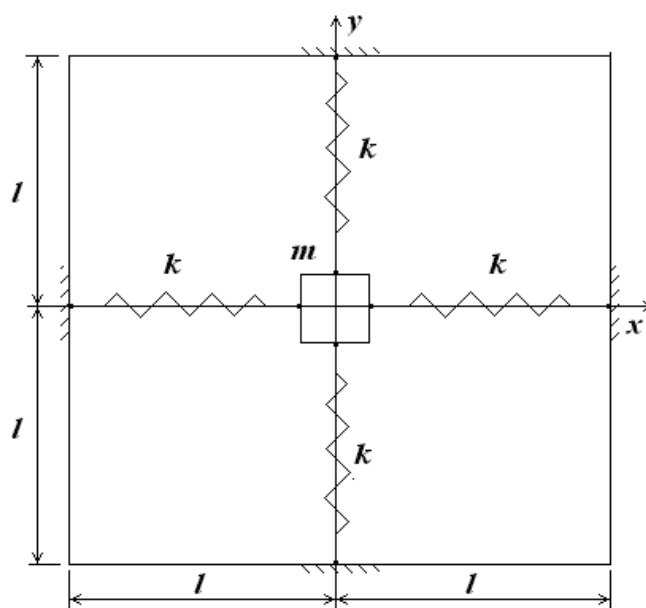


Рис. 15. Двумерный осциллятор на 4-х пружинках

1. Смоделировать движение тела при различных начальных смещениях и начальных скоростях.
2. Определить область значений  $x$  и  $y$ , при которых колебания  $x(t)$ ,  $y(t)$  близки к гармоническими. По какому критерию это можно сделать?
3. Подобрать соотношения между жесткостями пружин по  $x$  и  $y$  так, чтобы можно было наблюдать фигуры Лиссажу. Получить несколько таких фигур.

Показывать траекторию тела (не рисуя пружинки) и графики зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$ .

### 3.34. Связанные осцилляторы: продольные колебания

На гладкую горизонтальную спицу насажены 2 шарика массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные невесомыми пружинками с жесткостями  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 16). В равновесии пружинки не деформированы.

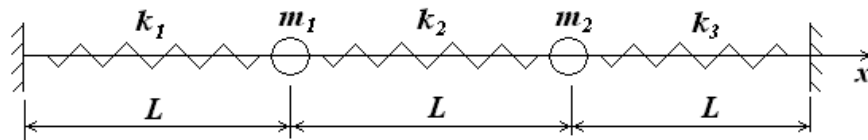


Рис. 16. Связанные осцилляторы в равновесном состоянии

1. Смоделировать движение шариков и получить зависимости координат  $x_1$  и  $x_2$  от времени при нескольких соотношениях между массами шариков и жесткостями пружинок.
2. Рассмотреть случай  $m_1 = m_2$ ,  $k_1 = k_2 = k_3$ . Задать начальные условия для возбуждения 2-х возможных мод колебаний. Задав числовые значения для  $m$  и  $k$ , определить частоты (через период) этих колебаний. Сравнить их с теоретическими значениями.
3. Повторить пункт 2 при 3-х одинаковых шариках и 4-х одинаковых пружинках.

Показывать движение шариков (пружинок не рисовать) и графики  $x_i(t)$ .

### 3.35. Связанные осцилляторы: поперечные колебания

На гладкие параллельные спицы, лежащие в горизонтальной плоскости, насажены 3 шарика массами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , шарнирно соединенные невесомыми пружинками с жесткостями  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ . (рис. 17). В равновесии пружинки не деформированы.

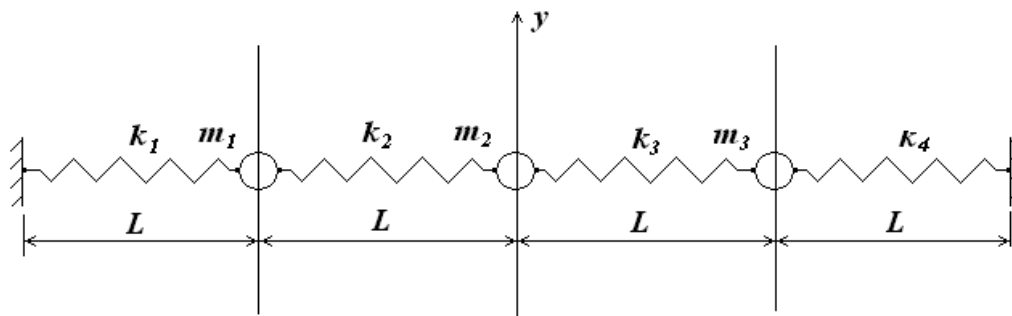


Рис. 17. Связанные осцилляторы при поперечных колебаниях: равновесное состояние

1. Смоделировать движение шариков при нескольких значениях масс и жесткостей и начальных условий по координатам и скоростям. Построить графики  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ . От чего зависят периоды колебаний каждого шарика?
2. Задать  $m_1 = m_2 = m_3$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ . Одинаковы ли периоды колебаний шариков? Возбудить возможные моды колебаний и, задав численные значения  $m$  и  $k$ , определить их частоты (через периоды), сравнить их с теоретическими значениями. Показывать движение шариков (пружинки не рисовать).

### 3.36. Двойной маятник

Рассмотреть малые колебания двойного маятника (рис. 18). Считать, что синусы углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  пропорциональны самим углам, а силы натяжения нитей вертикальны и равны, соответственно,  $(m_1+m_2)g$  и  $m_2g$ . Составить систему дифференциальных уравнений для координат  $x_1$ ,  $x_2$  и решить ее.

Рассмотреть различные начальные условия:

- отклонить нижний шарик и отпустить;
- толкнуть нижний шарик;

– отклонить оба шарика ( $x_{10}=x_{20}$ );

– толкнуть верхний шарик.

Рассмотреть движение при разном соотношении масс и длин маятников (сравнимы, много больше, много меньше).

Показывать движение шаров вдоль оси  $ox$ , графики зависимости координат от времени.

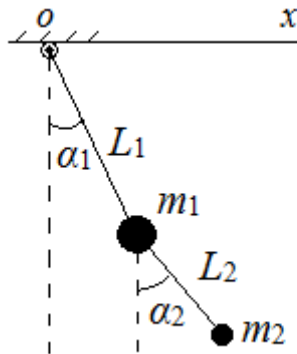


Рис. 18. Двойной маятник

### 3.37. Параметрический резонанс

Рассмотрим математический маятник (рис. 19), в котором момент инерции груза относительно точки подвеса может изменяться со временем (как

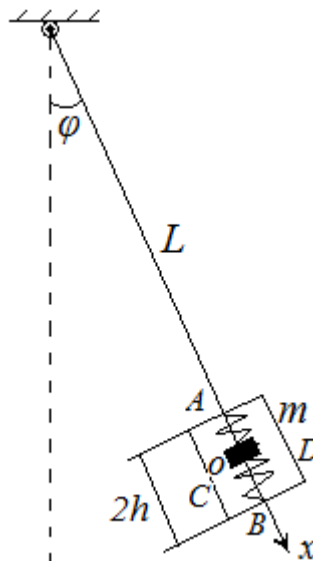


Рис. 19. Параметрический маятник

при раскачивании на реальных качелях). Пусть под воздействием внутреннего источника энергии груз малого размера массой  $m$  может колебаться вдоль стержня АВ по закону  $x=h \cdot \cos(\omega_1 t)$ .

Смоделировать движение маятника, предполагая, что  $h \ll L$  и пренебрегая массой контейнера ABCD. Показывать траекторию движения груза  $m$ , зависимости  $\varphi(t)$ ,  $x(t)$ , фазовую плоскость  $\varphi(t) - \omega(t)$ , ( $\omega$  - угловая скорость).

Исследовать параметрический резонанс, подбирая начальные условия и соотношение между параметрами задачи определенным образом.

### 3.38. Конический маятник

Небольшой шар прикреплен в точке подвеса невесомым стержнем длиной  $L$  (рис. 20). Как известно, шар движется по окружности при определенном соотношении между параметрами  $\alpha_0$ ,  $V_0$ ,  $L$  (вывести его). Это симметричный конический маятник

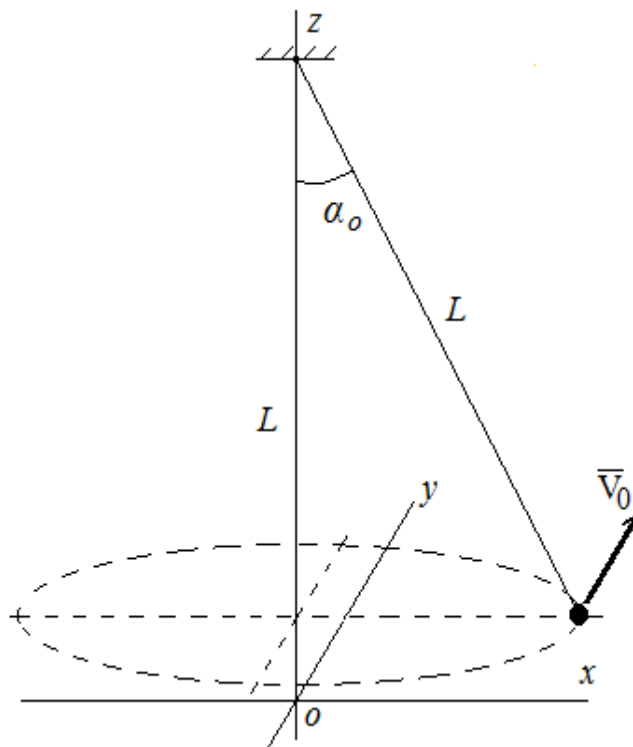


Рис. 20. Конический маятник. Вектор начальной скорости  $\vec{V}_0 \parallel oy$ .

Однако, если сделать  $\alpha_0$  и  $V_0$  независимыми при заданном  $L$ , траектория изменится, угол  $\alpha$  не будет постоянным. Смоделировать движение маятника при произвольных начальных  $\alpha_0$  и  $V_0$ . Нарисовать траекторию в проекциях на плоскости  $oxy$ ,  $oxz$ ,  $oyz$ . Показывать графики  $x(t)$ ,  $z(t)$ .

*Указание*

Дифференциальные уравнения движения для  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  содержат силу натяжения стержня. Она может быть выражена через эти функции и их производные при дополнительном условии  $x^2 + y^2 + (L-z)^2 = L^2$  (\*), но уравнения получаются весьма громоздкими. Для простоты можно положить зависимость этой силы от угла  $\alpha$ , как для симметричного конического маятника. При этом нужно решать только дифференциальные уравнения для  $x(t)$  и  $y(t)$ , а  $z(t)$  получить из (\*).

### 3.39. Маятник Фуко

Смоделировать малые колебания математического маятника массой  $m$ , с длиной нити  $L$  с учетом вращения Земли. Рассмотреть неинерциальную систему отсчета  $oxyz$  (рис. 21), привязанную к месту колебаний на широте  $\varphi$ . В ней ось  $oy$  направлена по касательной к меридиану на север, ось  $oz$  - вертикальна

1. Учесть силу Кориолиса и центробежную силу. Силу натяжения нити считать равной  $mg$ . Учесть дополнительно силу сопротивления воздуха, действующую только на шарик (формула (1)).
2. В силу малости угловой скорости  $\omega$  вращения Земли поворот плоскости колебаний маятника будет мал. Однако в модельном эксперименте можно брать и большие значения  $\omega$ . Исследовать зависимость угла поворота плоскости колебаний от  $\omega$ , от  $L$  и от  $\varphi$

Показывать движение шарика в плоскости  $oxy$ , графики зависимостей координат  $x$  и  $y$  от времени. Принять  $L = 60 - 100$  м,  $m = 1$  кг,  $r = 10$  см,  $\varphi = 0^\circ - 90^\circ$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  м. (В Исаакиевском соборе Санкт-

Петербурга был установлен маятник на тресе длиной 98 метров, массой 54 кг, плоскость колебаний которого поворачивалась на  $13^\circ$  за 1 час).

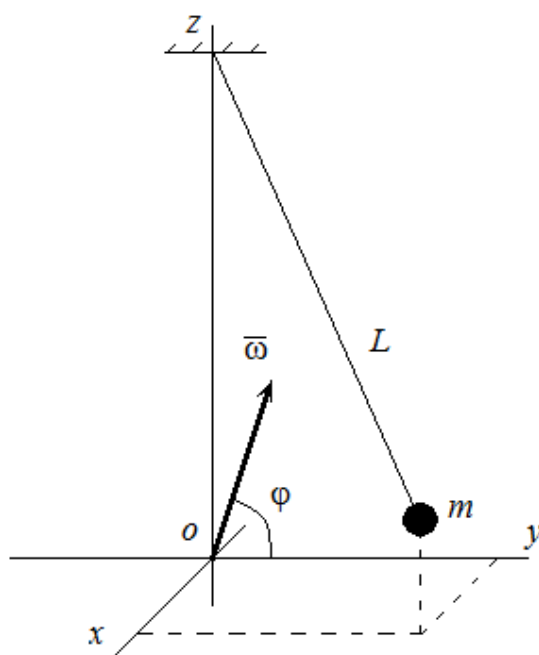


Рис. 21. Маятник Фуко.  $\bar{\omega}$  - вектор угловой скорости Земли

### 3.40. Столкновение шайб

На гладкой горизонтальной площадке с бортами размером  $a \times a$  находятся расположенные случайным образом  $N$  шайб диаметром  $a/10$ . Шайбам сообщают одинаковые начальные скорости  $V_0$ , равномерно распределенные по направлениям. Смоделировать движение шайб при их абсолютно упругом столкновении друг с другом и с бортами. Считать боковые поверхности шайб абсолютно гладкими. (В этом случае при столкновении шайбы не закручиваются). Показывать движение шайб.

Рассчитать распределение шайб по скоростям путем усреднения за длительный промежуток времени. Сравнить его с распределением Максвелла для молекул двумерного идеального газа.

#### Указание

Интервал скоростей  $[0, 4V_0]$  разбить на 40 отрезков. Создать массив  $n_i$ ,  $i = 1 \dots 40$ , где  $n_i$  – число шайб, имеющих скорости от  $V_{i-1}$  до  $V_i$ ;  $V_i = V_0 \cdot i/10$ .



При каждом переборе всех шайб (один шаг по времени движения) изменять  $n_i$  по алгоритму:  $n_i = n_i + 1$ , если скорость шайбы на данном шаге по времени лежит в диапазоне от  $V_{i-1}$  до  $V_i$ .

После окончания  $N_t$  шагов по времени преобразовать массив  $n_i$  в массив  $nv_i$  по правилу

$$nv_i = \frac{n_i}{N \cdot N_t \cdot \Delta V_i} = \frac{10n_i}{N \cdot N_t \cdot V_0},$$

т.е.  $nv_i$  – это относительная доля шайб, имеющих скорости в интервале от  $V_{i-1}$  до  $V_i$ , полученная усреднением по многим шагам по времени. Построить гистограмму  $nv_i$  как функцию  $V_i$ . На этой гистограмме изобразить функцию распределения Максвелла молекул двумерного идеального газа по скоростям

$$f(V) = \frac{2V}{V_0^2} \cdot e^{-V^2/V_0^2}.$$

(Вывести это соотношение, пользуясь известной формулой распределения Максвелла для компонентов скоростей, теоремой о равномерном распределении кинетической энергии молекул идеального газа по степеням свободы и связью абсолютной температуры газа со средней кинетической энергией).

Найти площадь под гистограммой.

### 3.41. Зайцы – лисы

Пусть в некотором лесу первоначально имеется  $x_0$  особей зайцев и  $y_0$  особей лис. Предположим следующее.

1. Скорость увеличения численности зайцев (за счет родившихся минус умерших естественной смертью) пропорциональна численности зайцев с коэффициентом пропорциональности  $r_1$ .
2. Скорость уменьшения численности зайцев за счет поедания их лисами пропорциональна произведению количества зайцев на количество лис: коэффициент пропорциональности  $k_1$ .

3. Скорость увеличения численности лис пропорциональна произведению количества зайцев на количество лис с коэффициентом  $k_2$ .
4. Смертность лис пропорциональна их численности (например, из-за нехватки пищи и из-за болезней): коэффициент пропорциональности  $r_2$ .

Составить математическую модель задачи в виде 2-х дифференциальных уравнений и начальных условий для них. Смоделировать изменение численности зайцев и лис со временем при различных значениях коэффициентов  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . Рассмотреть также случай, когда некоторое постоянное число зайцев  $x_1$  может убежать от лис.

Показывать графики  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
2. Марков К.А. Фаддеев М.А., Хомицкий Д.В. Избранные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений для физиков: учебное пособие. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2015.
3. Васин А.С. Компьютерный эксперимент в физике. Методические указания и задания. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2006.
4. Маликов Р.Ф. Практикум по компьютерному моделированию физических явлений и объектов. Уфа: Изд-во БашГПУ, 2005.  
(<http://suroklxj.bget.ru/sibgau/al-malikov.pdf>)
5. Фаддеев М.А., Марков К.А. Численные методы: учебное пособие. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2005.
6. Муравьев В.А., Бурланков Д.Е. Практическое введение в пакет МАТНЕМАТИСА: учебное пособие. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2010.
7. Бурланков Д.Е. Графика на основе диалога MFC в Visual C++. Методические указания. – Н. Новгород: Издательство ННГУ, 2001.

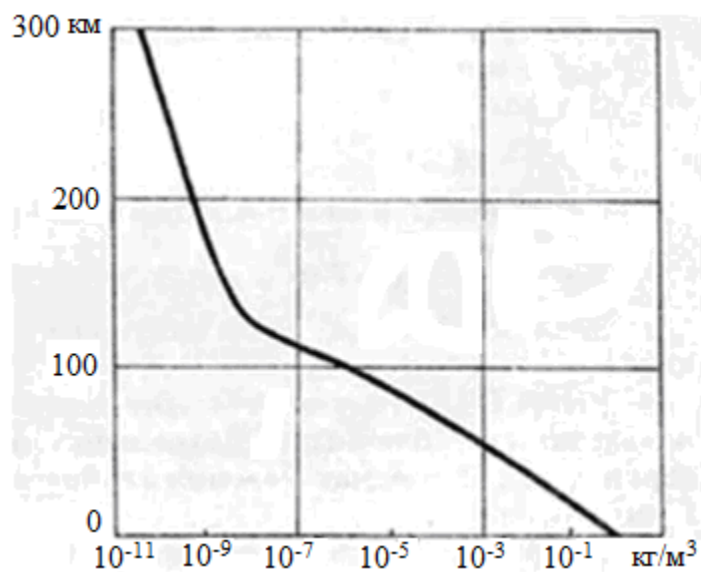
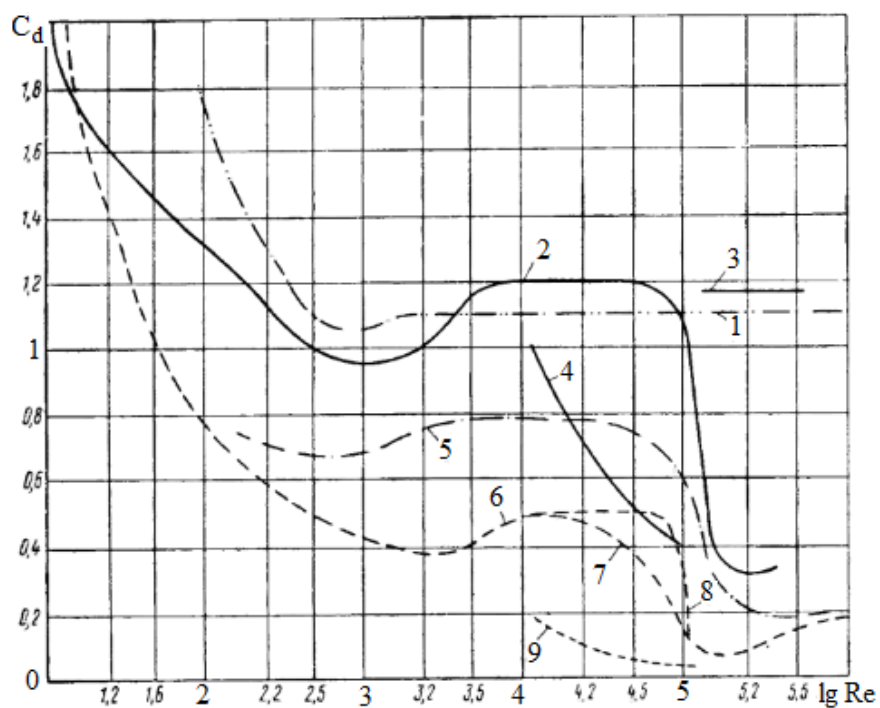


График зависимости плотности атмосферы от высоты над уровнем моря



Коэффициенты лобового сопротивления тел в зависимости от числа Рейнольдса:

- 1 - круглый диск; 2 - цилиндр гладкий; 3 - квадратная пластинка; 4 - цилиндр шероховатый; 5 - цилиндр гладкий,  $L/d = 5$ ; 6 - шар; 7 - шар в турбулентном потоке;
- 8 - шар в ламинарном потоке; 9 - крыло самолета

Александр Сергеевич **Васин**

**Применение численных методов  
к моделированию физических процессов**

**Практикум**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский  
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.