МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Экономико-математические методы и модели в управлении

Практикум

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Нижний Новгород

2021

УДК 330.4(076)

ББК У050.03я73-4

Э 40

Э 40 ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ: Практикум. – Составитель Рахмелевич И.В.– Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. –32 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Перова В.И.

В настоящем практикуме приведены задания для проведения практических занятий по дисциплине «Экономико-математические методы и модели в управлении». В частности, практикум включает задания по межотраслевым линейным математическим моделям (модель Леонтьева, линейная модель торговли); задания на поиск оптимального решения в различных экономических ситуациях, задания на выполнение финансовых расчётов. Задания снабжены методическими указаниями.

Практикум предназначен для студентов второго курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление».

Ответственный за выпуск:

заместитель директора ИЭП по учебной работе,

председатель методической комиссии ИЭП,

к.э.н., доцент Макарова С. Д.

УДК 330.4(076)

ББК У050.03я73-4

Оглавление

Введение

Настоящий практикум содержит задания для проведения практических занятий по дисциплине «Экономико-математические методы и модели в управлении» для студентов 2-го курса, обучающихся по направлению подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление». При выполнении заданий используются знания и навыки, полученные при изучении дисциплин «Математика» и «Информатика». Практикум включает задания по межотраслевым линейным математическим моделям (модель Леонтьева, линейная модель торговли); задания на поиск оптимального решения в различных экономических ситуациях, задания на выполнение финансовых расчётов. Задания снабжены методическими указаниями. Выполнение заданий настоящего практикума предполагается при проведении занятий в аудиториях, оборудованных компьютерами с установленным пакетом программ Microsoft Office.

Задание 1. Анализ модели Леонтьева

Задача 1.1.

В двухотраслевой экономической модели Леонтьева даны матрица прямых затрат **A** и вектор конечного потребления $\vec{y}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}9 & 0{,}3\end{pmatrix},\ \vec{y}=\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix}.$$

Требуется:

1) найти матрицу полных затрат S;

2) проверить, является ли модель продуктивной;

3) в случае продуктивной модели найти вектор валового выпуска $\vec{x}$.

Методические указания:

1. Матрица полных затрат S определяется формулой $\mathbf{S}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$, где **E** – единичная матрица.

   а) Находим матрицу $\mathbf{B}=\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}6\\ -0{,}9 & 0{,}7\end{pmatrix}$;

   транспонированная матрица $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}9\\ -0{,}6 & 0{,}7\end{pmatrix}$

   б) Определитель $\det\mathbf{B}=0{,}8\cdot0{,}7-0{,}9\cdot0{,}6=0{,}02\neq0$, поэтому обратная матрица существует.

   в) Элементы матрицы S находятся по формулам: $s_{ij}=\dfrac{1}{\det\mathbf{B}}B_{ij}^{\mathrm{T}}$, где B_{ij}^{T} – алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы.

   $\mathbf{S}=\begin{pmatrix}35 & 30\\ 45 & 40\end{pmatrix}$. Так как $\det\mathbf{B}\neq0$ и все $s_{ij}>0,\ a_{ij}>0$, то модель является продуктивной.

   г) Вектор валового выпуска вычисляется по формуле $\vec{x}=\mathbf{S}\vec{y}$ или $x_1=s_{11}y_1+s_{12}y_2=475$, $x_2=s_{21}y_1+s_{22}y_2=625$.

Задача 1.2.

Решить задачу 1.1 для следующих значений матрицы прямых затрат (при этом вектор конечного потребления $\vec{y}$ остается тот же, что и в первоначальной задаче):

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}7\\ 0{,}8 & 0{,}1\end{pmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}7\\ 0{,}5 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

Задача 1.3.

В двухотраслевой модели Леонтьева даны следующие величины:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ -вектор валового выпуска; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 72 \\ 123 \end{pmatrix}$ - вектор конечного потребления;

$z = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$ - матрица производственных затрат.

Вычислить каким будет объем выпуска в каждой отрасли, если конечное потребление в 1-й отрасли увеличится в 2 раза, а во 2-й отрасли – не изменится.

Методические указания:

1. Находим элементы матрицы прямых затрат по формуле $a_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$, тогда

   $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

2. Аналогично задаче 1.1 находим $\det \mathbf{B} \approx 0{,}82 \neq 0$;

   S=(**E**-**A**)$^{-1}$= $\dfrac{1}{0{,}82}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}$. Модель является продуктивной.

3. Изменённый вектор конечного потребления $\tilde{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$.

4. Изменённый вектор валового выпуска вычисляется по формуле $\tilde{\vec{x}} = \mathbf{S}\,\tilde{\vec{y}}$,

   откуда $\tilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 178{,}8 \\ 160{,}5 \end{pmatrix}$

Задача 1.4.

Решить ту же задачу для следующих исходных данных:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}$ -вектор валового выпуска; $\vec{y} = \begin{pmatrix} 240 \\ 85 \end{pmatrix}$ - вектор конечного потребления;

$z = \begin{pmatrix} 100 & 160 \\ 275 & 40 \end{pmatrix}$ - матрица производственных затрат.

Вычислить каким будет объем выпуска в каждой отрасли, если конечное потребление в 1-й отрасли увеличится в 2 раза, а во 2-й отрасли – увеличится на 20%.

Задание 2. Линейная модель торговли

Задача 2.1.

Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти, при каком соотношении национальных доходов стран торговля между ними будет сбалансированной.

Методические указания:

1. Торговля между странами будет сбалансированной при выполнении условия $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{x}$, где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ -величины национального дохода каждой страны. Тогда задача сводится к решению однородной линейной системы $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\vec{x} = 0$, где $\mathbf{E}$ –единичная матрица.
2. Подставляя значения элементов матрицы А, запишем систему в развёрнутом виде:
$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Решая систему методом Гаусса, находим:
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}$, где c – произвольная постоянная.

Задача 2.2.

Решить ту же задачу для следующей структурной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Оптимальное планирование производства

Предположим, что в трех цехах (Ц1, Ц2,Ц3) изготавливаются два вида изделий И1 и И2. Известна загрузка каждого цеха $\boldsymbol{a_{ij}}$ (оцениваемая в данном случае в процентах) при изготовлении каждого из изделий и цена реализуемой продукции в рублях $\boldsymbol{c_i}$.(за1 изделие). Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 3.1.

1. Определить, сколько изделий каждого вида следует производить при возможно более полной загрузке цехов, чтобы получить за рассматриваемый плановый период максимальный доход.
2. Решить задачу также для значений $\boldsymbol{c_1}$=80,160,320,640, предполагая во всех случаях, что $\boldsymbol{c_2}$.= 320. В каком случае оптимальный план включает только один вид изделий?

Таблица 3.1

Изделия	Цех (участок)			Цена изделия
	Ц1	Ц2	Ц3	
И1	5%	1,6%	2,9%	240 руб.
И2	4%	6,4%	5,8%	320 руб.
Максимальная загрузка	100%	100%	100%	

Решить задачу с помощью Поиска решения MS Excel.

Методические указания:

1. Добавить к таблице справа дополнительный столбец «Количество изделий» и ввести в него произвольные величины, например, x_1=x_2 =1).
2. Добавить к таблице внизу дополнительную строку «Фактическая загрузка и доход». В ячейках этой строки написать формулы, выражающие фактическую загрузку каждого цеха и суммарный доход от реализации изделий через x_1, x_2.
3. Вызвать Поиск решения. Задать целевую ячейку (суммарный доход), цель поиска решения (максимум), изменяемые ячейки (количество изделий), ограничения (количество изделий неотрицательно, фактическая загрузка каждого цеха не больше максимальной). В состав ограничений также добавить условие, что x_1, x_2.-целые.
4. Запустить задачу на выполнение.
5. Скопировать таблицу на листы 2,3,4,5, решить задачу для других значений $\boldsymbol{c_1}$ и проанализировать результаты.

Задание 4. Расчет диеты

Задача 4.1.

Фирма занимается составлением диеты, содержащей не менее 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице 4.1 ценах (в рублях) на 1 кг пяти имеющихся продуктов?

Таблица 4.1

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

Методические указания.

1. Ввести исходные данные в рабочий лист Excel. Добавить справа к таблице дополнительный столбец «Минимальные потребности», в который ввести указанные выше минимальные количества белков, углеводов, жиров и витаминов.
2. Добавить снизу к таблице дополнительную строку «Количество продуктов», в которой задать начальные значения количества каждого продукта.
3. Добавить справа к таблице еще один столбец «Показатели диеты и стоимость», в который ввести формулы для расчета количества единиц по каждому показателю (белков, углеводов и т.д.) и суммарной стоимости диеты.
4. Запустить Поиск решения и указать целевую и изменяемые ячейки и ограничения. Ограничения должны включать условия неотрицательности количества каждого продукта и условия того, что показатели по каждому компоненту диеты не менее минимальных потребностей.
5. Запустить задачу на выполнение и проанализировать результаты.
6. Скопировать таблицу на листы 2,3,4.

Задача 4.2.
Решить задачу составления диеты при минимальной суммарной массе продуктов и тех же исходных данных.

Задача 4.3.
Решить задачу 3.1 при дополнительном условии, что каждого продукта должно быть не менее 1 кг.

Задача 4.4.
Создать на листе 4 сценарии, отличающиеся между собой значениями изменяемых ячеек x_i, соответствующими решениям задач 4.1 – 4.3. Создать отчет по сценариям типа «структура».

Задание 5. Планирование штатного расписания

Задача 5.1.

Целью данной задачи является составление оптимального штатного расписания. Предприятию обслуживания требуется принять на работу служащих при условии, что каждый из них будет работать пять дней в неделю с двумя выходными днями подряд. Известно, что предприятию требуется:

- в понедельник - 17 служащих,
- во вторник - 13 служащих,
- в среду - 14 служащих,
- в четверг - 15 служащих,
- в пятницу - 18 служащих,
- в субботу - 24 служащих,
- в воскресенье - 22 служащих.

Требуется составить график работы, который обеспечит выполнение всех работ минимальным составом служащих.

Методические указания:

Составим математическую модель. Очевидно, что служащие могут быть распределены по семи бригадам, каждая из которых имеет свой график работы. Обозначим численности бригад переменными x1, x2, x3, x4, x5, x6 и x7, как показано в таблице 5.1:

Таблица 5.1

Номер бригады	Выходные дни	Численность бригады
1	Понедельник, вторник	x1
2	Вторник, среда	x2
3	Среда, четверг	x3
4	Четверг, пятница	x4
5	Пятница, суббота	x5
6	Суббота, воскресенье	x6
7	Воскресенье, понедельник	x7

Общая численность работников равна сумме численностей всех бригад, то есть $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7$. Эту сумму нужно минимизировать.

Вычислим количество служащих, которые работают в понедельник. Это сумма численностей всех бригад, кроме первой и последней, у которых понедельник - выходной день. То есть количество работников в понедельник равно $x2 + x3 + x4 + x5 + x6$. Эта величина не должна быть меньше требуемого количества - 17 человек. Таким образом, получаем ограничение:

$x2 + x3 + x4 + x5 + x6 \geq 17$.

Аналогично получим еще шесть ограничений для остальных дней недели (записать самостоятельно).

Нужно наложить еще два ограничения: неизвестные численности бригад должны быть неотрицательными и целыми числами, то есть $xi \geq 0$ и xi - целые числа ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

Задача 5.2

Пусть оплата труда служащего за 1 день работы составляет:
с понедельника по пятницу -800 р.;
в субботу и воскресенье -1200 р.

Решить на листе 2 задачу составления оптимального штатного расписания при условии, что минимальной должна быть сумма затрат на оплату труда всех служащих.

Задание 6. Задачи о назначениях

Задача 6.1.
Оптимизация портфеля инвестиций при ограниченном бюджете

Фирма рассматривает пакет инвестиционных проектов, предварительные результаты анализа которых приведены в таблице 6.1:

Таблица 6.1

Проект	Затраты (I)	Прибыль (P)
1	22000	9000
2	16000	7000
3	12000	5500
4	10000	5000
5	8000	4500
6	7500	3500
7	7000	3000
8	4000	2500

Инвестиционный бюджет фирмы ограничен и равен *S*.

1. Определите оптимальный инвестиционный портфель, для которого суммарная прибыль принятых проектов будет максимальной. При этом общая сумма затрат на финансирование всех принятых проектов должна быть не больше *S*. Решить задачу для значений *S*=50000, 80000.
2. Пусть для каждого из проектов заданы минимальная и максимальная величина затрат I_{min}, I_{max}, а также отношение прибыли к затратам *P*/*I*. Найти состав оптимального инвестиционного портфеля, а также величину затрат для каждого проекта. Решить задачу для значений *S*=50000, 80000. Параметры проектов приведены в таблице 6.2:

Таблица 6.2

Проект	I_{min}	I_{max}	P/I
1	15000	25000	0,35
2	15000	25000	0,45
3	10000	20000	0,4
4	5000	15000	0,5
5	5000	15000	0,6
6	5000	15000	0,7
7	5000	15000	0,25
8	3000	10000	0,8

Методические указания:

Добавить к таблице новый столбец, содержащий двоичные переменные назначения (=1, если проект выбран, =0, если проект не выбран). Написать формулы для суммарных затрат и суммарной прибыли для набора выбранных проектов и выполнить Поиск решения.

Задача 6.2. Оптимальный план работ

Имеются n =4 рабочих и m =4 видов работ. Стоимость p_{ij} выполнения i-м рабочим j-й работы приведена в таблице 6.3, где рабочему соответствует строка, а работе – столбец.

Таблица 6.3

		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочие	1	3	6	2	5
	2	1	2	7	11
	3	5	12	11	9
	4	2	4	2	10

1. Составить оптимальный план работ так, чтобы:
   а) все работы были выполнены, причем за каждой работой закреплен только один рабочий;
   б) каждый рабочий был занят только на одной работе;
   в) суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.
2. Решить задачу 1 при дополнительных условиях:
   сумма стоимостей работ (1)+(4) не менее 30% от стоимости всех работ;
   сумма стоимостей работ (2)+(3) не менее 30% от стоимости всех работ.
3. Решить задачу 1 при дополнительном условии:
   стоимость работы каждого рабочего составляет не менее 15% от стоимости всех работ.

Задание 7. Транспортная задача

Фирма имеет 4 фабрики и 5 центров распределения ее товаров. Фабрики фирмы располагаются в Денвере, Бостоне, Новом Орлеане и Далласе с производственными возможностями 200, 150, 225 и 175 единиц продукции ежедневно, соответственно. Центры распределения товаров фирмы располагаются в Лос-Анджелесе, Далласе, Сент-Луисе, Вашингтоне и Атланте с потребностями в 100, 200, 50, 250 и 150 единиц продукции ежедневно, соответственно. Стоимость перевозки единицы продукции c_{ij} с фабрик в пункты распределения приведена в таблице 7.1.

Таблица 7.1

		1	2	3	4	5
		Лос-Анджелес	Даллас	Сент-Луис	Вашингтон	Атланта
1	Денвер	1,5	2	1,75	2,25	2,25
2	Бостон	2,5	2	1,75	1	1,5
3	Новый Орлеан	2	1,5	1,5	1,75	1,75
4	Даллас	2	0,5	1,75	1,75	1,75

Необходимо так спланировать перевозки, чтобы минимизировать суммарные транспортные расходы.

Методические указания:

1. Добавить в рабочий лист таблицу, содержащую объемы перевозок x_{ij}- с i-й фабрики в j-й центр распределения, задать начальные значения этих величин.
2. Составить выражение для целевой функции (суммарная стоимость перевозок) используя массивы c_{ij} , x_{ij}.
3. Задать ограничения, которым должно удовлетворять искомое решение:
   а) объемы перевозок неотрицательны;
   б) объем продукции, вывезенный с каждой фабрики, не должен превышать объема производства этой фабрики (i=1,2,3,4);
   $$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le a_i$$

- в) потребности всех центров распределения должны быть полностью удовлетворены (j=1,2,3,4,5):

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geq b_j$$

4. Выполнить Поиск решения.

Задание 8. Оптимальное расположение коммерческой организации

Задано n =9 пунктов сбыта продукции с координатами (x_i,y_i). Расположение организации – поставщика продукции определяется координатами (x,y). Кроме того, заданы объемы перевозок a_i.

Тогда суммарные транспортные издержки на перевозку всей продукции определяются формулой $J = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$, где $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ – расстояние между поставщиком продукции и i–м пунктом сбыта.

Задача 8.1.

Определить оптимальное положение организации – поставщика продукции, при котором суммарные транспортные издержки будут минимальны. При этом должно выполняться дополнительное условие $r_1 \le 1$. Остальные данные приведены в таблице:

Таблица 8.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i	0,2	0,6	0,3	0,4	0,5	0,4	0,2	0,7	0,6
x_i	-7	8	-9	5	4	-5	2	8	-4
y_i	1	-6	2	-7	-3	8	-6	-5	-5

Задача 8.2.

Определить оптимальное положение организации, предполагая, что кроме ее координат x,y неизвестными являются объемы перевозок a_i. При этом, кроме условий п.1 должны выполняться следующие дополнительные условия:

а) $0{,}1 \le a_i \le 0{,}8$;

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 4$.

Задание 9. Распределение средств между предприятиями

Планируется деятельность четырех предприятий компании на очередной год. Начальные средства, распределяемые между предприятиями, составляют N усл. ед. Средства x, выделяемые k-му предприятию (k=1,2,3,4), приносят в конце года прибыль $f_k(x)$.

Предполагается, что суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия. Функции $f_k(x)$ заданы в виде таблицы 9.1:

Таблица 9.1

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Задача 9.1.

Используя Поиск решения, определить оптимальное распределение средств между предприятиями, при котором суммарная прибыль максимальна, предполагая, что x_k>=1.

Методические указания:

1. По приведенной таблице получить уравнения, аппроксимирующие функции $f_k(x)$. Для этого выполнить действия:
   а) построить графики или точечные диаграммы для всех функций;
   б) выделить диаграмму, вызвать команду **Линия тренда** на вкладке **Макет**;
   в) в меню команды **Линия тренда** выбрать пункт **Дополнительные параметры линии тренда**;
   г) в окне Формат **линии тренда** выбрать тип линии тренда – **Полиномиальная**, степень 4; установить метку «Показать уравнение на диаграмме». Выполнить перечисленные выше действия для всех функций.
2. Задать начальные значения величин x_k=1. С помощью полученных ранее уравнений линий тренда вычислить прибыль каждого предприятия и суммарную прибыль от всех предприятий.
3. Используя Поиск решения, определить оптимальное распределение средств между предприятиями, при котором суммарная прибыль

максимальна, задав при этом ограничения x_k>=1, $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Выполнить вычисления для случаев N =5,10,15. Как меняется характер распределения средств при изменении N?

Задача 9.2.

Решить задачу 9.1 при N = 10 и следующих дополнительных условиях:
а) доля прибыли полученной предприятиями 1,2 (в сумме) составляет не менее половины от суммарной прибыли всех четырех предприятий;
б) доля прибыли полученной предприятиями 3,4 (в сумме) составляет не менее половины от суммарной прибыли всех четырех предприятий.

Задание 10. Двойственные задачи линейного программирования

Задача 10.1.

Дана задача линейного программирования

$F(x)=5x_1+2x_2\to\max,$

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2\le 45,\\ 7x_1+10x_2\ge 35,\\ 3x_1+5x_2=30,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

Составить задачу, двойственную по отношению к данной.

Методические указания:

1. Сначала запишем задачу в стандартном виде, так как она на максимум, ограничения неравенства приведем к виду $\le$:

$F(x)=5x_1+2x_2\to\max,$

$$\begin{cases} 6x_1+5x_2\le 45,\\ -7x_1-10x_2\le -35,\\ 3x_1+5x_2=30,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

2. Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных в целевой функции соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений исходной задачи и равно 3.

3. Целевая функция двойственной задачи: $G(y)=45y_1-35y_2+30y_3\to\min$

4. Строим ограничения двойственной задачи, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5\\ -7 & -10\\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T \to \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3\\ & & \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции. Первое и второе ограничения исходной задачи имеют знак $\le$, соответствующие двойственные переменные y_1, y_2 неотрицательны, для переменной y_3 ограничений по знаку нет.

6. Таким образом, двойственная задача имеет вид:

$G(y) = 45y_1 - 35y_2 + 30y_3 \to \min$

$$\begin{cases} 6y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq 5, \\ 5y_1 - 10y_2 + 5y_3 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ y_3 - \text{любое}. \end{cases}$$

Задача 10.2.

Составить самостоятельно задачу, двойственную по отношению к следующей задаче линейного программирования:

$F(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + x_3 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задание 11. Управление инвестициями с учётом финансового риска

имеет возможность вложить средства в N финансовых активов. доходность i-го актива (i=1,…,N) на протяжении T периодов описывается заданной функцией $r_i(t)$ (t=1,…,T).

Доля x_i, вкладываемая инвестором в каждый из активов от полной инвестируемой суммы, неизвестна и подлежит определению в ходе решения задачи.

Требуется найти оптимальное распределение средств инвестора между финансовыми активами для следующих случаев:
а) средняя ожидаемая доходность портфеля должна быть максимальной, а показатель риска не должен превышать заданного значения;
б) показатель риска должен быть минимальным, а средняя ожидаемая доходность портфеля должна быть не меньше заданного значения.

Методические указания:

1. Средняя ожидаемая доходность портфеля определяется формулой:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{N} \overline{r}_i x_i ,$$

где $\overline{r}_i$ – средняя ожидаемая доходность актива, вычисляемая на основании известных данных по формуле

$$\overline{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_i(t)$$

2. В качестве показателя риска портфеля используется величина $\Delta R = \sqrt{D(R)}\Big/\sqrt{2\pi}$

где $D(R)$ – дисперсия его доходности, вычисляемая по формуле

$$D(R) = \sum_{i=1}^{N} K_{ij} x_i x_j$$

K_{ij} –элементы матрицы ковариации.

3. В случае а) (портфель с максимальной доходностью) требуется найти решение, для которого $\overline{R} \to \max$, и выполняются следующие ограничения:

$x_i \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ – величины, характеризующие долю вложений в каждый актив, должны быть неотрицательны, а их сумма равна 1;

$\Delta R \le \Delta R_{\max}$ – показатель риска портфеля не должен превышать заданной величины.

4. В случае б) (портфель с минимальным риском) требуется найти решение, для которого $\Delta R \to \min$, и выполняются следующие ограничения:

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad \overline{R} \geq R_{\min}.$$

Рассматривается случай, когда N=3, T=10. Данные о доходностях активов за каждый период приведены в таблице 11.1:

Таблица 11.1

t	$r_1(t)$	$r_2(t)$	$r_3(t)$
1	0,2	0,36	0,12
2	0,25	0,31	0,22
3	0,3	0,28	0,32
4	0,3	0,28	0,32
5	0,4	0,16	0,52
6	0,25	0,31	0,22
7	-0,1	0,66	0,48
8	0,5	0,06	0,72
9	0,33	0,23	0,38
10	0,39	0,17	0,51

Задача 11.1.

Найти оптимальное распределение средств инвестора между финансовыми активами для портфеля с максимальной доходностью при максимально допустимом показателе риска $\Delta R_{\max} = 0{,}03$. Построить диаграмму, на которой отобразить структуру оптимального портфеля.

Задача 11.2.

Найти оптимальное распределение средств инвестора между финансовыми активами для портфеля с минимальным риском при минимально допустимой доходности $R_{\min}$=0,15. Проанализировать случаи модели Марковица (с перечисленными выше ограничениями) и модели Блэка (ограничение $x_i \geq 0$ отсутствует). Построить диаграммы, на которых отобразить структуру оптимального портфеля для указанных случаев.

Задание 12. Равновесная цена. Эластичность спроса и предложения

Задача 12.1.

Заданы функции спроса *Q(p)* и предложения *S(p)* от цены товара *p*:

$Q(p)=\dfrac{p+a_2}{p+a_1}$, $S(p)=p+b$, где a_1, a_2, b – положительные действительные параметры. Найти:

1) равновесную цену, при которой спрос равен предложению;
2) эластичность спроса и предложения для равновесной цены;
3) числовые значения равновесной цены, эластичностей спроса и предложения для случая a_1=2, a_2=8, b=1.

Методические указания:

1. Из условия равенства спроса и предложения *Q(p) = S(p)* получается квадратное уравнение относительно *p*, решая которое находим равновесную цену. При этом условию задачи удовлетворяют только положительные корни этого уравнения.
2. Эластичность спроса и предложения находим по формулам:
   $$E_p(Q)=\frac{p}{Q(p)}Q'(p),\quad E_p(S)=\frac{p}{S(p)}S'(p).$$
3. Подставляя значения a_1=2, a_2=8, b=1 в полученные формулы, находим числовые значения равновесной цены, эластичностей спроса и предложения.

Задача 12.2.

Найти равновесную цену, эластичность спроса и предложения для равновесной цены, если функции спроса *Q(p)* и предложения *S(p)* имеют вид:

$$Q(p)=Q_0/p^{\beta},\quad S(p)=S_1+(S_0-S_1)p^{\alpha}$$

Решить задачу с помощью Подбора параметра или Поиска решения Excel для значений параметров: $Q_0=5, S_0=5, S_1=1,\quad \alpha=0{,}5,\quad \beta=1{,}5.$

Задание 13. Нахождение условного экстремума методом множителей Лагранжа

Задача 13.1.

Найти экстремум функции $u(x,y,z) = y(x+z)$ при дополнительных условиях $x+y=2$, $y+z=2$, используя метод множителей Лагранжа.

Методические указания:

1. Функция Лагранжа для данной задачи
$L(x,y,z,\lambda_1, \lambda_2) = y(x+z)+ \lambda_1(x+y-2)+ \lambda_2(y+z-2)$.
2. Стационарные точки находятся из условий равенства 0 первых производных функции Лагранжа по всем аргументам, откуда получается система уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1+y=0, \\ \lambda_2+y=0, \\ \lambda_1+ \lambda_2+x+z =0, \\ x+y-2=0, \\ y+z-2=0. \end{cases}$$

3. Из 1-го и 2-го уравнений следует, что $\lambda_1= \lambda_2=-y$. Тогда система уравнений приводится к виду:
$x+z -2y =0$
$x+y=2,$
$y+z=2.$
Решая эту систему, находим точку экстремума (1,1,1).

Задача 13.2.

Найти экстремум функции $u(x,y,z) = x^2+y^2$ при дополнительном условии $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, используя метод множителей Лагранжа (a,b – действительные параметры).

Задание 14. Анализ ипотечной ссуды

Исходные данные:

Стоимость приобретаемого жилья – 2 000 000 руб.

Первоначальный взнос – 20 %

Срок погашения ссуды (общее число выплат по ссуде) – 36 (мес.)

Процентная ставка по ссуде (год.) – 12 %

Задача 14.1.

Используя исходные данные, построить таблицу в Excel, в которой рассчитать:

- Общую сумму ссуды, исключая первоначальный взнос.
- Ежемесячную величину выплаты по ссуде, используя финансовую функцию ПЛТ.
- Общую сумму, выплачиваемую на протяжении интервала выплат.

Скопировать созданную таблицу на листы 2,3,4.

Задача 14.2.

С помощью команды **Подбор параметра** определить:

- При какой стоимости приобретаемого жилья ежемесячная величина выплаты по ссуде составит 40000 руб.

Задача 14.3.

С помощью команды **Поиск решения** определить:

- При каком сроке погашения ссуды (<=36) и процентной ставке (<=12 %) ежемесячная величина выплаты по ссуде составит 50000 руб.

Задача 14.4.

С помощью команды **Диспетчер сценариев** вычислить:

- Общую сумму, выплачиваемую на протяжении всего срока погашения кредита для случаев, когда этот срок равен 24,30,36,42,48 месяцев. Создать отчет по сценариям и проанализировать, какой из этих вариантов является наиболее выгодным и наименее выгодным для заемщика.

Задание 15. План погашения кредита

Задача 15.1.

Банком выдан кредит в 10 000 ден. ед. на 5 лет под 12 % годовых, который должен быть погашен равными долями, выплачиваемыми раз в конце каждого года. Разработать план погашения кредита.

Решить задачу с использованием финансовых функций Excel. Результаты вычислений занести в таблицу 15.2.

Исходные данные:

Таблица 15.1

Сумма кредита (PV)	Срок погашения (n)	Число выплат в году (m)	Процентная ставка (r)	Тип начисления (0 или 1)
10000	5	1	12 %	0

Результаты вычислений:

Величина платежа (CF) = Общее число выплат (mn) =

Таблица 15.2

Номер периода	Баланс на конец	Основной долг	Проценты	Накопленный долг	Накопленный процент
1					
2					
3					
4					
5					

Методические указания:

Величина платежа (CF) вычисляется с использованием функции **ПЛТ.**

Общее число выплат (mn) – Произведение числа выплат на срок погашения.

Баланс на конец – Разность Суммы кредита и Накопленного долга.

Основной долг – вычисляется с использованием функции **ОСПЛТ.**

Проценты – вычисляется с использованием функции **ПРПЛТ.**

Накопленный долг – Сумма основного долга по периодам.

Накопленный процент – Сумма процентов по периодам.

В силу заложенного алгоритма расчета функции возвращают отрицательные величины. Для получения положительных значений задайте их со знаком минус.

Задача 15.2.

Скопировать таблицы на лист 2. Вычислить отношение суммы выплаченных за весь срок процентов к сумме кредита. Используя **Подбор параметра**, вычислить, при какой ставке по кредиту это отношение будет равно 0,3.

Задача 15.3.

Скопировать таблицы на лист 3. На листе 3 выполнить расчеты с теми же исходными данными, что на листе 1 для случая, когда срок погашения равен 10 лет. Сравнить отношение суммы процентов, выплаченных за весь срок кредита, к сумме кредита для случаев n=10 и n=5. Какой из этих вариантов является более выгодным для заемщика?

Задание 16. Анализ доходности банковских депозитов

Вкладчик открывает в банке депозит на сумму S_0=50000 с последующим пополнением суммами по ΔS=10000. Процентная ставка по депозиту r=10% годовых.

Задача 16.1.

Найти величину депозита S к концу T=4 лет. Сделать расчеты для случаев, когда пополнение производится в начале и в конце периода. Сравнить результаты для этих двух случаев. При расчетах использовать финансовую функцию БС.

Задача 16.2.

Найти, какой должна быть начальная сумма S_0, чтобы величина депозита по окончании T=4 лет составила S=200000 для случая, когда пополнение депозита производится в конце периода.

Задача 16.3.

Найти, какой должна быть сумма взносов ΔS, чтобы величина депозита по окончании T=4 лет составила S =200000 для случая, когда пополнение депозита производится в конце периода.

Задача 16.4.

Найти, при какой процентной ставке величина депозита по окончании T=4 лет составит S =200000 для случая, когда пополнение депозита производится в конце периода, начальная сумма S_0=50000 и размер пополнения ΔS=10000.

Задача 16.5.

Используя Поиск решения, найти начальную сумму S_0, сумму пополнения ΔS и процентную ставку r , при которых к концу срока депозита его сумма S =150000 при следующих дополнительных условиях:

а) $\Delta S \leq 12000$;

б) $r \leq 15\%$;

в) общая сумма вложенных средств не более 100000.

Задача 16.6.

Рассчитать зависимость величины депозита S от срока накопления T в интервале $1 \leq T \leq 20$ для случаев ΔS=10000 и ΔS=0. Для 2-го случая сравнить результаты с результатами расчета $S(T)$ по формулам простых и сложных процентов. Построить график, на котором отобразить указанные зависимости.

Заключение

В соответствии с рабочей программой дисциплины и образовательным стандартом ННГУ для направления подготовки 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», данный практикум ориентирован на формирование компетенции УК-2 «Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений». В ходе выполнения заданий данного практикума студенты закрепляют знания математических методов, используемых для анализа и управления экономическими системами, приобретают навыки формализации задач принятия решений применительно к экономике, выбора методов решения этих задач и проведения экономической интерпретации полученных результатов, овладевают современными инструментальными средствами для решения задач принятия оптимальных решений.

Список литературы

1. Гетманчук А. В. Экономико-математические методы и модели / Гетманчук А.В., Ермилов М.М. – М.:Дашков и К, 2017. – 186 с.: (доступно в ЭБС «Знаниум», Режим доступа: http: //znanium.com /catalog.php? bookinfo =415314)
2. Новиков А.И. Экономико-математические методы и модели: Учебник для бакалавров / Новиков А.И. – М.:Дашков и К, 2017. – 532 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», Режим доступа: http://znanium.com /catalog.php? bookinfo =937492)
3. Юдин С.В. Математика и экономико-математические модели: Учебник/ С.В. Юдин – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 374 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», Режим доступа: http://znanium.com /catalog.php? bookinfo =491811)
4. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / Орлова И.В., – 2-е изд., испр. и доп. – М.:Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 140 с. (доступно в ЭБС «Знаниум», Режим доступа: http://znanium.com/ catalog.php? bookinfo =546672)
5. Сидорова, М.И. Экономико-математические модели в управленческом учете и анализе [Электронный ресурс] : Монография / М. И. Сидорова, А. И. Мастеров. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2013. – 229 с. – ISBN 978-5-394-02330-9 – Режим доступа: http://znanium.com /catalog.php? bookinfo=514585
6. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. –3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 479 с.
7. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов / В.В. Федосеев и др.; под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.
8. Дыкман О.А., Рахмелевич И.В. Финансовые функции MS Excel: сборник задач. – Н.Новгород: НКИ, 2002.

Экономико-математические методы и модели в управлении

Практикум

Составитель **Игорь Владимирович Рахмелевич**

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.