МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

А.Б. Колпаков

А.С. Рукомина

Краткий курс лекций по дисциплине «*Теория вероятностей и Математическая статистика*» Часть 1. Теория вероятностей.

(*Short course of lectures on the discipline "Probability theory and Mathematical statistics"* Part 1. Probability theory**)**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика» и 38.03.02 «Менеджмент».

Нижний Новгород
2021

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
К61
Колпаков А.Б., Рукомина А.С., Краткий курс лекций по дисциплине «*Теория вероятностей и Математическая статистика*» Часть 1. Теория вероятностей.
(A.B. Kolpakov and A.S. Rukomina, *Short course of lectures on the discipline "Probability theory and Mathematical statistics"* Part 1. Probability theory): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. — 77с.

Рецензент:

к.ф.-м.н., доцент В.И. Перова

В настоящем пособии представлено краткое изложение материла по теории вероятностей в соответствии с рабочими программами по дисциплине *«Теория вероятностей и математическая статистика»* разработанными для таких направлений подготовки специалистов как Экономика (38.03.01) и Менеджмент (38.03.02). Материал также может быть использован и при подготовке по направлению Управление персоналом (38.03.03) в процессе изучения дисциплины *«Математика»*.

Пособие рассчитано как на русских студентов, так и на студентов-иностранцев, которые, как показывает опыт, далеко не всегда достаточно хорошо владеют русским языком для того чтобы без каких-либо затруднений понять смысл различных математических терминов и фраз. Часто оказывается полезным переход на английское произношение и написание соответствующих математических слов и словосочетаний. В связи с этим, каждый раздел предлагаемого курса дублирован на английском языке.

Ответственный за выпуск:
Председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,

к.э.н., доцент Макарова С.Д.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
К61

Содержание (Content)

Введение

К настоящему времени, опубликовано довольно большое количество учебных и различных методических пособий, посвященных дисциплине *Теория вероятностей и математическая статистика*. Однако, при работе над ними авторы, как правило, брали за основу конкретные рабочие программы, ориентированные на специфику подготовки специалистов в конкретных учебных заведениях. Настоящее пособие представляет собой сборник коротких лекций по *теории вероятностей*, написанный на базе учебного материала читаемого студентам Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета Н.И. Лобачевского. Предлагаемый учебный материал главным образом рассчитан на такие направлениям подготовки как **Менеджмент** (38.03.02) и **Экономика** (38.03.01). Кроме того, он может быть использован и слушателями проходящими подготовку по такому направлению как **Управление персоналом** (38.03.03), в процессе изучения курса математики.

Пособие рассчитано и на студентов-иностранцев, которые, как показывает опыт, далеко не всегда настолько хорошо владеют русским языком, что могут без каких-либо затруднений понять смысл различных математических терминов и выражений. В таких случаях, часто оказывается полезным переход на английское произношение и написание соответствующих математических слов и словосочетаний.

Надеемся, что использование представленного материала существенно облегчит и ускорит процессы понимания и запоминания математических терминов. Сопоставление английского и русского написания одного и того же термина повысит грамотность иностранных слушателей в русском языке и ускорит процесс освоения.

Для русскоязычных студентов, пособие окажется полезным как с точки зрения освоения курса, так и совершенствования уровня подготовки по английскому языку.

Introduction

By the present time, quite a large number of textbooks and various methodological manuals dedicated to the discipline *of Probability Theory and Mathematical Statistics* have been published. It is worth noting that, when working on them, the authors usually used specific work programs, focused on the nature of training specialists in particular educational institutions. The present textbook is a compilation of brief lectures on *Probability Theory*, based on the teaching material, presented to the students of Nizhny Novgorod N.I. Lobachevsky State University's Institute of Economics and Entrepreneurship. The proposed study material is mainly intended for such specialties as **Management** (38.03.02) and **Economics** (38.03.01). Moreover, it can also be used by students majoring in **Human Resources Management** (38.03.03.03) in the process of studying the Mathematics course.

The textbook is also designed for foreign students, since experience shows that they do not always have such a good command of Russian, which allows them to understand the meaning of various mathematical terms and expressions easily. In such cases, the transition to English pronunciation and spelling of the corresponding mathematical words and phrases is often useful.

This material will hopefully make it easier and faster to understand and remember mathematical terms. Comparing English and Russian spellings of the same term will increase foreign students' literacy in Russian and accelerate the learning process.

This textbook will be useful for Russian-speaking students, both in terms of mastering the course and improving their English proficiency.

Раздел 1.

1.1 Предмет теории вероятностей, основные понятия и задачи

Теория вероятностей – *математическая наука, изучающая закономерности в явлениях (событиях) с неопределенным исходом, которые при неограниченном воспроизведении одного и того же испытания (опыта) каждый раз протекают несколько по-иному*. Ее основными понятиями являются ***элементарное событие*** и ***пространство элементарных событий***. Под *элементарным событием* следует понимать появление или наоборот непоявление того или иного исхода испытания. *Пространство элементарных событий* представляет собой множество, каждому элементу которого соответствует один исход испытания. Подмножество пространства элементарных событий принято называть ***случайным событием***, которое в результате испытания может произойти или не произойти (выпадение цифры при подбрасывании монеты, звонок по сотовому телефону в данную минуту и т. д.). Именно математические модели случайных событий и представляют предмет исследования теории вероятностей.

Задачи теории вероятностей, в первую очередь, заключаются в том, чтобы осуществлять научный прогноз различных явлений за счет предвидения вероятностей предшествующих им других более сложных явлений. Кроме того, с помощью теории вероятностей осуществляется количественная оценка влияния различных случайных факторов на результат какого-либо конкретного испытания. Последнее, представляет интерес для экспериментаторов, с точки зрения изучения возможности оказания влияния на конечный результат этог68+о испытания.

Каждое из событий обладает той или иной степенью возможности появления, которая (количественно) характеризуется его ***вероятностью.*** Событие считается ***достоверным,*** если в результате опыта оно обязательно должно произойти. (например, выпадение одной из шести граней при бросании игральной кости). Его вероятность равна единице. Противоположным достоверному событию считается событие ***невозможное***, которое не может произойти в данном опыте (выпадение десяти очков при бросании игральной кости). Его вероятность равна нулю. В том случае, если вероятность события не равна нулю но близка к нему, данное событие принято называть ***практически невозможным.*** А если вероятность не равна единице, но близка к ней – ***практически достоверным.***

В том случае, если в результате осуществления какого-либо опыта, одно из нескольких событий обязательно должно произойти, то считается что последние образуют ***полную группу событий.*** В качестве примера можно привести обязательное появление 1, 2, 3, 4, 5 из 6 очков при бросании игральной кости. При этом, вполне понятно, что любые два из событий (например, одновременное появление «2» и «5» очков) не могут произойти одновременно. Такие события и им подобные принято называть ***несовместными.***

Если можно считать, что ни одно из всех возможных событий появляющихся в результате испытания, не является объективно более возможным чем другие (как в случае появления определенного количества очков при бросании игральной кости), то такие события принято называть ***равновозможными*** и считать что данное испытание (опыт) обладает симметрией и «сводится к схеме случаев».

1.2. Вероятность случайного события. Классическое определение вероятности Элементы комбинаторики.

Как известно, каждое испытание завершается некоторым исходом (результатом) или событием. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита *A, B, C,…*. Каждое из них, как уже отмечалось выше, обладает какой-то степенью возможности своего появления. Числовая мера этой возможности, например какого-либо события *A,* представляет собой не что иное как вероятность его появления и обозначается символом $P(A)$. Предположим, что проводится испытание и из общего количества "n" несовместных равновозможных его исходов (случаев), "m" случаев благоприятствуют событию A. Тогда, согласно *классическому определению*, вероятность события A определяется отношением числа исходов ему благоприятствующих, к общему числу исходов:

$$P(A) = m / n \tag{1}$$

В том случае если A – достоверное событие, то $m = n$ и $P(A) = 1$; если невозможное, то $m = 0$ и $P(A) = 0$; если A – случайное событие, то $m \le n$ и $P(A) \le 1$. Следовательно, вполне очевидно что вероятность заключена в пределах: $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 1. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность событий: A – появление четного числа очков; B – появление не менее пяти очков; C – появление не более пяти очков.

Решение. Испытание имеет шесть равновозможных независимых исходов (появление одного, двух, трех, четырех, пяти или шести очков), образующих полную систему. Из них, событию A благоприятствуют три исхода (выпадение двух, четырех и шести очков), поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$; событию B – два исхода (выпадение пяти и шести очков), поэтому $P(B) = 2/6 = 1/3$; событию C – пять исходов (выпадение одного, двух, трех, четырех и пяти очков), следовательно $P(C) = 5/6$.

При вычислении вероятности, часто приходится использовать формулы *комбинаторики* – раздела математики, который изучает, в частности, методы решения дискретных (комбинаторных) задач, т.е. задач на подсчет числа различных комбинаций. Если выборки (комбинации) из n элементов отличаются только порядком расположения этих элементов, то их принято называть *перестановками* из n элементов.

$$P_n = n! \tag{2}$$

В том случае, если в перестановках из общего числа n элементов имеется некоторое подмножество, состоящее из d элементов, в котором 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раз, элемент с номером d – n_d раз и выполняется равенство $n_1 + n_2 + \cdots + n_d = n$, то такие перестановки принято называть перестановками с повторением из n элементов:

$$P_n(n_1, n_2 + \cdots + n_d) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_d!} \tag{3}$$

Если выборки из n элементов по m отличаются друг от друга только составом элементов, то их называют *сочетанием* из n элементов по m:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (4)$$

В случае, когда некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются *сочетаниями с повторениями* из n элементов по m:

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n+m-1}}^{\mathrm{m}}. \qquad (5)$$

Выборки из n элементов по m, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем и другим) представляют собой размещения из n элементов по m:

$$A_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} \cdot P_m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (6)$$

Если некоторые элементы (или все) могут оказаться одинаковыми, то такие размещения называются *размещениями с повторениями* из n элементов по m:

$$\widetilde{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = n^m \qquad (7)$$

Рассмотрим конкретные примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 2. В урне находится 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные (событие A)?

Решение. Общее число равновозможных независимых исходов равно

$$\mathrm{n} = \mathrm{C}_{13}^{2} = \frac{13!}{2!(13-2)!} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

Событию A благоприятствуют $\mathrm{m} = \mathrm{C}_{7}^{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ исходов. Следовательно, его вероятность определяется отношением: $P(A) = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}$.

Пример 3. В партии из 24 деталей пять бракованных. Из партии выбирают наугад 6 деталей. Найти вероятность того, что среди этих 6 деталей окажутся 2 бракованных (событие *B*).

Решение. Общее число равновозможных независимых исходов равно

$$\mathrm{n} = \mathrm{C}_{24}^{6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 134596.$$

Число исходов m благоприятствующих событию *B* может быть определено следующим образом:

Среди шести взятых наугад деталей должно быть 2 бракованных и 4 стандартных. Две бракованные детали из пяти можно выбрать $\mathrm{C}_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами, а 4 стандартных детали из 19 стандартных можно выбрать $\mathrm{C}_{19}^4 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876$ способами. Каждая комбинация бракованных деталей может сочетаться с каждой комбинацией стандартных деталей, поэтому $.m = 3876 \times 10 = 38760$. Следовательно:

$$P(B) = \frac{38760}{134596} = \frac{510}{1771} \approx 0{,}3$$

Пример 4. Девять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом (событие *C*).

Решение. Здесь число равновозможных независимых исходов есть $n=P_9=9!$ Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию *C*. Представим себе, что четыре определенные книги связаны вместе, тогда эту связку можно расположить на полке $P_6=6!$ способами (связка плюс остальные пять книг). Внутри связки четыре книги можно переставлять $\mathrm{P}_4=4!$ способами. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждым из P_6 способов образования связки, т.е. $\mathrm{m} = 6! \cdot 4!$.

Следовательно, $P(C) = \frac{6! \cdot 4!}{9!} = \frac{1}{21}$.

Пример 5. Сколько можно составить восьмизначных чисел, которые состоят из цифр 2, 3 и 4 при условии что цифры 2 и 3 повторяется по 3 раза, а цифра 4 – 2 раза ?

Решение. Каждое восьмизначное число будет отличаться от другого порядком следования цифр (в данном случае, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, а их сумма равна 8). Т.е., ответом будет являться перестановка из 8 элементов (см. формулу (3)):

$$P(3,3,2) = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

1.3 Действия над событиями.

В процессе решения задач, непосредственный подсчет случаев благоприятствующих данному событию может оказаться очень затруднительным. В связи с этим, для определения вероятности события часто бывает более удобным представление рассматриваемого события в виде комбинации других событий являющихся более простыми. При этом, необходимо знать такие правила действий над событиями как сумма, разность и произведение.

1.3.1. ***Сумма событий***

Определение: Суммой нескольких событий принято называть событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из них.

Так, например, в простейшем случае, когда событий два (*A* и *B*), сумма (*A*+*B*) означает такое третье событие *C*, которое, если они совместны, состоит в появлении либо события *A* либо *B*, или того и другого, и наступление либо *A* либо *B*, если они несовместны.

Теоремы сложения вероятностей:

Теорема 1: *Вероятность наступления одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A + B + ...D) = P(A) + P(B) + ... + P(D) \tag{8}$$

Применение данной теоремы всегда требует проверки рассматриваемых событий на предмет их совместности !

Пример 6. В лотерее разыгрывается 1000 билетов, при этом, на один выигрышный билет приходится 100 руб., на 5 билетов – 20 руб., на 100 билетов – 5 руб. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей по одному лотерейному билету.

Решение. Пусть A_1 – событие состоящее в выигрыше 5 руб., тогда

$$P(A_1)=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10};$$

пусть A_2 – событие выигрыша 20 руб., тогда

$$P(A_2)=\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}$$

пусть A_3 – событие выигрыша 100 руб., тогда

$$P(A_3)=\frac{1}{1000}$$

События A_1, A_2, A_3 – несовместны.

Пусть A – событие выигрыша ≥ 20 руб., тогда $A=A_2+A_3$ поскольку наступит или A_2, или A_3, то согласно (8):

$$P(A)=P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{6}{1000}=0{,}006.$$

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, то есть

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B) \qquad (9)$$

Пример 7. Найти вероятность, что при подбрасывании двух игральных кубиков хотя бы один раз выпадет 6 очков.

Решение. Введем события:

A – выпадение 6 очков на 1-ом кубике

B – выпадение 6 очков на 2-ом кубике

Ввиду того, что события A и B совместны, то есть 6 очков по условию задачи может появиться либо на одном из кубиков, либо на обоих сразу, то согласно теореме 2.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

С учетом того, что $\mathrm{P}(A)=1/6;$ $\mathrm{P}(B)=1/6;$ $\mathrm{P}(AB)=1/36;$ получим:

$$P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

1.3.2 *Разность событий*

Определение: Разностью двух событий A и B: $A-B$ принято называть событие, которое состоится, если A произойдет, а B не произойдет.

Пример 8. Победитель соревнования награждается: призом (событие A), денежной премией (событие B), медалью (событие C). Что представляет собой, например, событие $AB-C$?

Решение. Событие $AB-C$ заключается в награждении победителя одновременно и призом, и премией без выдачи медали.

<u>Примечание:</u> *Разность двух событий A и B можно представить и как произведение события A на событие противоположное B: $\overline{B}$, т.е.: $A-B=A\overline{B}$. Соответственно в примере 14 интересующее событие можно представить в виде: $AC\overline{B}$.*

1.3.3. Произведение событий

Определение: Произведением двух событий AB называется такое третье событие, которое состоит в их совместном появлении.

Если событий более двух, то их произведением называется событие, которое состоит в совместном появлении всех этих событий.

Section 1.

1.1 Probability theory subject, basic concepts and problems

Probability theory *is a mathematical discipline that studies regularities in phenomena (events) with an uncertain outcome, where the same experiment (test) is unlimitedly reproduced in a slightly different way in each case.* Its basic concepts are ***the elementary event*** and ***the space of elementary events***. The appearance or non-appearance of this or that outcome of the test should be understood as an *elementary event*. *The space of elementary events* is a set, each element of which corresponds to one outcome of a test. A subset of the elementary event space is called a ***random event***, which may or may not happen as a result of the test (a number falling out when a coin is tossed, a cell phone call in a given minute, etc.). The mathematical models of random events are the subject of probability theory research.

The primary objective of probability theory is to make scientific predictions of various phenomena by anticipating the probabilities of other more complex phenomena that precede them. Moreover, through the probability theory, the influence of various random factors on the result of any particular test is quantified. The possibility of influencing the final result of this test is of interest to experimenters.

Each event has some degree of occurrence possibility, which is (quantitatively) characterized by its ***probability***. An event is considered ***reliable*** if it must necessarily occur as a result of the experiment (for example, the die comes to rest after being rolled and shows one of six faces). Its probability is equal to 1. The opposite of a reliable event is an ***impossible*** event, which cannot happen as a result of the experiment (a ten-point die roll). Its probability is equal to 0. An event is considered ***virtually impossible*** if its probability is not equal to 0 but is close to it. When its probability is not equal to 1, but close to it, this event is called ***virtually reliable***.

In the event one of several events must occur as a result of any experiment, it is considered that they form a ***complete group of events***. The example is the obligatory occurrence of 1, 2, 3, 4, 5 out of 6 points when rolling a die. However, any two of the events (for example, the simultaneous occurrence of "2" and "5" points) cannot be simultaneous. Such events and similar events are commonly referred to as ***disjoint events.***

When none of all possible events resulting from an experiment can be assumed to be objectively more possible than others (as in the case of a certain number of points in a roll of the die), then such events are called ***equally possible*** and the test (experience) is assumed to be symmetrical and "reduced to a pattern of cases".

1.2. Random event probability. Traditional definition of probability. Elements of combinatorics.

It is known that each experiment concludes with some outcome (result) or event. The capital letters of the Latin alphabet A, B, C,.... are used to denote events. As previously mentioned, each of them has some degree of possibility of its occurrence. The numerical measure of this possibility, for example of an event A, is nothing but the probability of its occurrence and is denoted by the symbol $P(A)$. Let us assume that an experiment is carried out and of the total number "n" of disjoint equally possible outcomes (cases), "m" cases are favorable to the event A. Hence, according to the *traditional definition*, event A probability is determined by the proportion of outcomes favorable to it to the total number of outcomes:

$$P(A) = m / n \tag{1}$$

If A is a reliable event, then $m=n$ and $P(A)=1$; if it is possible, then $m=0$ and $P(A)=0$; if A – is a random event, then $m \leq n$ and $P(A) \leq 1$. Consequently, it is quite obvious that the probability is within the range: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Example 1. The die is rolled once. Find the probability of the following events: A - the result of an even number of points; B - the result of at least five points; C - the result of no more than five points.

Solution. An experiment has six independent equally possible outcomes (the result of one, two, three, four, five, or six points), which form a complete system. Out of them, event A is favored by three outcomes (two, four, and six points), therefore $P(A)=3/6=1/2$; event B is favored by two outcomes (five and six points), therefore $P(B)=2/6=1/3$; event C is favored by five outcomes (one, two, three, four, and five points), therefore $P(C)=5/6$.

When determining probability, we often have to use formulas of *combinatorics*, a branch of mathematics that studies methods of solving discrete (combinatorial) tasks, i.e. tasks for counting the number of different combinations. When samples (combinations) of elements differ only in the order in which these elements are arranged, they are usually called *permutations* of elements.

$$P_n = n! \tag{2}$$

Should there be some subset consisting of x elements in permutations of the total number of n elements, in which the 1st element is repeated n_1 times, the 2nd element is repeated n_2 times, the element with number d is repeated n_d times, and the equality $n_1 + n_2 + \cdots + n_d = n$ is fulfilled, then such permutations are called permutations with repetition of n elements:

$$P_n(n_1, n_2 + \cdots + n_d) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_d!} \quad (3)$$

If samples of n elements to m differ from each other only by the composition of the elements, they are called a *combination* of n elements to m:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (4)$$

In the case where some (or all) of the elements may be equal, then such combinations are called combinations with *repetitions of n elements to m*:

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n+m-1}}^{\mathrm{m}}. \quad (5)$$

Samples of n elements to m, which differ from each other either by their composition or by their order (or both) represent placements of n elements to m:

$$A_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} \cdot P_m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (6)$$

If some (or all) of the elements may be equal, then such placements are called placements with repetitions of n elements to m:

$$\widetilde{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}} = n^m \quad (7)$$

Let's discuss specific examples of direct calculation of probabilities.

Example 2. There are seven red balls and six blue balls in the box. Two balls are taken out of the box at the same time. What is the probability that both balls are red (event *A*)?

Solution. The total number of equally possible independent outcomes is

$$\mathrm{n} = \mathrm{C}_{13}^{2} = \frac{13!}{2!(13-2)!} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

Event *A* is favored by $\mathrm{m} = \mathrm{C}_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ outcomes. Consequently, its probability is determined by the following ratio: $P(A) = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}$.

Example 3. There are five defective parts in a batch of 24 parts. Six parts from the batch are chosen at random. Find the probability that there are 2 defective parts among these 6 parts (event *B*).

Solution. The total number of equally possible independent outcomes is

$$n = C_{24}^{6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 134596.$$

The number of outcomes m favoring event *B* can be determined as follows:

There must be two defective parts and four standard parts among the six parts taken at random. Two defective parts out of five can be chosen by $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ ways, and 4 standard parts out of 19 standard parts can be chosen by $C_{19}^4 = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876$ ways. Each combination of defective parts can be matched with each combination of standard parts, so $m = 3876 \times 10 = 38760$. Consequently:

$$P(B) = \frac{38760}{134596} = \frac{510}{1771} \approx 0{,}3$$

Example 4. Nine different books are placed at random on one shelf. Find the probability that four specific books will be placed next to each other (event *C*).

Solution. Here the number of equally possible independent outcomes is $n=P_9=9!$ Let's count the number of outcomes m that are favorable to the event *C*. We can assume that four certain books are bound together, then this bundle can be arranged on the shelf by $P_6=6!$ ways (the bundle plus the other five books). The four books inside the bundle can be rearranged in $P_4=4!$ ways. Each combination inside the bundle can be combined with each of P6 ways to form a bundle, i.e. $m = 6! \cdot 4!$.

Therefore, $P(C) = \frac{6! \cdot 4!}{9!} = \frac{1}{21}$.

Example 5. How many eight-digit numbers can be composed of the figures 2, 3 and 4, provided that the figures 2 and 3 are repeated three times, and the figure 4 is repeated two times ?

Solution. Each eight-digit number will differ from the other by the order of figures (in this case, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, and their sum is 8). That is, the answer is a permutation of 8 elements (see formula (3)):

$$P(3,3,2) = \frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

1.3 Operations with events.

Direct counting of occurrences favorable to a given event may be very difficult in the process of problem solving. In this connection, it is often more convenient to represent the event in the form of a combination of other simpler events so as to determine the event's probability. In this case, it is necessary to know such rules of operations with events as sum, difference and product.

1.3.1. ***Sum of events***

Definition: The sum of several events is an event which consists of the occurrence of at least one of them.

The example of the simplest case: there are two events (*A* and *B*), the sum (*A*+*B*) means a third event *C* which, if they are combined, consists in the occurrence of either *A* or *B*, or both of them, and the occurrence of either *A* or *B*, if they are disjoint.

<u>Probability addition theorems:</u>

<u>Theorem</u> 1: *The occurrence probability of one of several disjoint events is equal to the sum of the probabilities of those events.*

$$P(A+B+....D)=P(A)+P(B)+....+P(D) \tag{8}$$

The application of this theorem always requires checking the events in question for their coherence !

Example 6. There are 1000 tickets in the lottery, with one winning ticket worth 100 rubles, 5 tickets worth 20 rubles, 100 tickets worth 5 rubles. Find the probability of winning at least 20 rubles from one lottery ticket.

Solution. May A_1 be the event of winning 5 rubles, then

$$P(A_1)=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10};$$

may A_2 be the event of winning 20 rubles, then

$$P(A_2)=\frac{5}{1000}=\frac{1}{200}$$

may A_3 be the event of winning 100 rubles, then

$$P(A_3)=\frac{1}{1000}$$

The events A_1, A_2, A_3 are disjoint.

May A – be the event of winning ≥ 20 rubles, then $A = A_2 + A_3$ since either A_2 or A_3 will occur, then according to (8):

$$P(A) = P(A_2 + A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{6}{1000} = 0{,}006.$$

<u>Theorem 2:</u> The probability of the sum of two simultaneous events A and B is equal to the sum of the probabilities of these events without the probability of their simultaneous occurrence, that is

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (9)$$

Example 7. Find the probability that when two dice are rolled, at least once the 6-point result will be obtained.

Solution. Let's introduce the events:

A - A roll of 6 points on the 1st die

B - A roll of 6 points on the 2nd die

Considering that the events A and B are simultaneous, i.e. according to the task condition 6-point result may appear either on one of the dice or on both of them at once, then according to Theorem 2.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Given that $\mathrm{P}(A) = 1/6;\ \mathrm{P}(B) = 1/6;\ \mathrm{P}(AB) = 1/36;$ we get:

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

1.3.2 Difference of events

Definition: The difference of two events A and A : $A - B$ is commonly referred to as an event that will happen if A occurs and B does not occur.

Example 8.

The competition winner is awarded with: a prize (event A), a money reward (event B), a medal (event C). What is the event $AB - C$, for example?

Solution. Event $AB - C$ includes awarding the winner with both a prize and a money reward without awarding a medal.

<u>Note:</u> *The difference of two events A and B can also be represented as the product of the event A on the event opposite to B : , i.e.: $A - B = A\overline{B}$. Respectively, the event of interest in Example 14 can be represented as: $AC\overline{B}$.*

1.3.3. The product of events

Definition: The product of two events is a third event that constitutes their joint occurrence.

If there are more than two events, then their product is the event that comprises the joint occurrence of all these events.

Раздел 2.
2.1. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности является ограниченным, поскольку применимо только для тех событий, которые могут появиться в результате испытаний обладающих *симметрией* возможных исходов или, как принято говорить, *сводящихся* к схеме случаев. Другими словами, каждое из таких событий является равновозможным. Так, например, в случае опытов проводимых с игральной костью предполагается, что последняя изготовлена из идеально однородного материала и имеет форму правильного куба. При этих предположениях вполне очевидно, что выпадение любой из граней представляет собой событий с одинаковой возможностью своего появления. Однако, в реальной действительности, задачи в которых можно исходить из соображений симметрии встречаются крайне редко. В связи с этим, вместе с классическим определением вероятности используют и *статистическое* определение.

Статистической вероятностью какого-либо конкретного события A принято называть относительную частоту появления этого события в процессе испытаний. Допустим, что в некотором опыте может произойти событие A. Предположим также, что производится n опытов, в которых событие A наступает m раз. Число m называется *частотой* события A, а число $\widetilde{P}(A) = m/n -$ *статистической вероятностью* этого события, представляющей собой *относительную частоту* (*частость*) появления A в n проведенных испытаниях.

Следует отметить, что данное определение вероятности применимо не к любым событиям с неопределенным исходом, а только к тем, которые обладают определенными свойствами:

1). Рассматриваемые события должны быть исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий;

2). События должны обладать *статистической устойчивостью* (устойчивостью относительных частот). Другими словами, в разных сериях испытаний, относительная частота события должна изменяться незначительно, колеблясь около постоянного значения;

3). Число испытаний, в результате которых появляется событие A должно быть достаточно велико, поскольку, только в этом случае можно полагать, что вероятность $\widetilde{P}(A)$ будет приближенно равна относительной частоте.

При статистическом определении вероятности, сохраняются все те свойства, которые следуют из ее классического определения:

1). вероятность достоверного события равна единице;

2). вероятность невозможного события равна нулю;

3). если случайное событие C является суммой конечного числа несовместных событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$ имеющих вероятности, соответственно, $P(A_1)$, $P(A_2)$, …, $P(A_n)$, то его вероятность определяется суммой:

$$P(C) = P(A_1) + P(A_1) + ... + P(A_n)$$

2.2. Геометрическое определение вероятности

Понятие *классической вероятности* основывается на рассмотрении конечного числа равновероятных исходов испытания. Однако, в реальной практике, очень часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. Поэтому, вводят другое определения вероятности – *геометрическое.*

Геометрическая вероятность представляет собой вероятность попадания точки в некоторую область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.) Предположим, что имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. В область G наудачу бросается точка и требуется определить, что она попадет в область g. При этом, имеется ввиду, что брошенная точка может попасть в любую точку области G, а вероятность попасть в какую-либо часть области g пропорциональна мере этой области (длине, площади и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы.

Согласно определению, *геометрической вероятностью* рассматриваемого события A (в данном случае, попадания точки в область g) называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области:

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$$

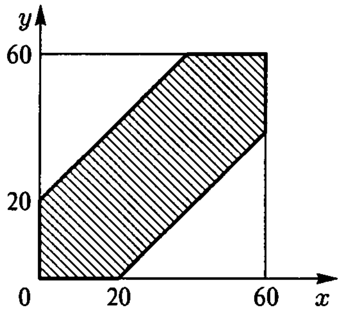
Рассмотрим следующие конкретные примеры.

Пример 1 *Задача о встрече.* Два лица A и B договорились встретиться в определенном месте во временном интервале между 12-00 и 13-00. Договорились так, что пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Вопрос: Чему равна вероятность встречи этих лиц, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы (т. е. момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого) ?

Решение. Пусть x и y – это моменты прихода, соответственно лиц A и B. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее условие:

$$|x-y| \leq 20$$

В системе координат Oxy возьмем за начало отсчета 12-00, а в качестве единицы масштаба выберем минуту. В этом случае, возможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60. Исходы благоприятствующие встрече – расположатся в заштрихованной области.



Искомая вероятность будет определяться отношением площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9} \approx 0{,}555$$

(Т. е.. момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого.)

2.3. Условная вероятность события. Теорема умножения вероятностей. Независимые события.

<u>Определение</u>: Условной вероятностью какого-либо события B принято называть его вероятность при условии, что другое событие A уже произошло.

Для условной вероятности используется обозначение $P_A(B)$ или $P(B/A)$. Получим формулу для ее вычисления. Предположим, что проводится какое-то испытание, общее число равновозможных и несовместных исходов (случаев) которого равно n. Пусть из этих n, событию A благоприятствуют m

случаев, а событию B – k случаев. При этом, совместному появлению событий A и B, т.е. событию AB благоприятствуют l случаев ($l \le m, l \le k$).

Тогда, согласно классическому определению вероятности: $P(A) = m/n$; $P(AB) = l/n$.

После того, как событие A произошло, число всех равновозможных исходов (случаев) сократилось с n до m. При этом, число случаев благоприятствующих событию B, сократилось с k до l. Поэтому, условная вероятность

$$P_A(B) = l/m = P(AB)/P(A) \tag{10}$$

Аналогично

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) \tag{11}$$

Умножая правую и левую части равенств (1) и (2) соответственно на $P(A)$ и $P(B)$ получим:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Т.е.:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \tag{12}$$

Последнее равенство представляет собой аналитическое выражение **теоремы (правила) умножения вероятностей**.

Согласно этой теореме*, вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже произошло.*

В случае произвольного числа событий (т. е., больше двух), теорема умножения вероятностей легко обобщается и формулируется следующим образом:

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других:

$$P(ABC...KL) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)....P_{ABC...N}(L) \tag{13}$$

(Условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли)

При этом, совершенно безразлично какое событие считать первым, вторым и. т. д. Т. е., порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым.

Теорема умножения вероятностей принимает наиболее простой вид, когда события, образующие произведение являются *независимыми*.

Событие B называется независимым от события A, если его вероятность не меняется от того, произошло событие A или нет, т. е. $P_A(B) = P(B)$. (Если это равенство не выполняется, то событие B называется зависимым от A).

Несколько событий $A,\ B, ..., L$ принято называть независимыми, если независимы любые два из них и независимы любое из данных событий и любые произведения остальных событий.

Для независимых событий, правило (теорема) умножения вероятностей для двух (3) и нескольких (4) событий имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(ABC...KL) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)....P(L)$$

Т. е. *вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 2. В урне содержится три белых и три черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. В урне, после первого испытания осталось 5 шаров, из них 3 белых. Следовательно, искомая условная вероятность

$$P_A(B) = 3/5$$

Этот же результат можно получить и по формуле (1). Предварительно отметим, что общее число исходов, т. е. совместного появления двух шаров (не важно какого цвета) определяется числом размещений $A_6^3 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов, событию AB, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый, благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Поэтому, $P(AB) = 9/30 = 3/10$. Тогда, искомая условная вероятность

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5$$

Пример 3. Студент должен сдать по математике зачет и экзамен. Вероятность сдачи зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого для студента равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст и зачет и экзамен ?

Решение. Введем следующие события:

A – сдача студентом зачета, тогда $P(A) = 0{,}8$;

B – сдача студентом экзамена после A, тогда $P_A(B) = 0{,}9$, поскольку событие B зависит от A, то $P(AB) = P(A)P_A(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$.

Пример 4. Вероятность попадания в цель каждого из трех орудий соответственно равна $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}7$; $P_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3 – попадание в цель первым, вторым и третьим орудием, тогда $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}9$. В этом случае, события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – промахи, соответственно, первого, второго и третьего орудия. Следовательно

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 = q_1;$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = q_2;$$

$$P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 = q_3.$$

Событие A состоит в том, чтобы хотя бы одно орудие попало в цель, тогда противоположное событие $\overline{A}$ будет состоять в том, что все три орудия промахнутся, т. е. $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

Тогда $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}3_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$

В том случае когда события независимые, например, вероятность события B не зависит от появление события A, теорема умножения (11) принимает следующий вид

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{14}$$

поскольку, в данном случае, условная вероятность события B равна его безусловной вероятности: $P_A(B) = P(B)$. Рравенство (14) можно использовать в качестве определения независимых событий. *Два события являются независимыми*, если вероятность их совместного наступления равна произведению вероятностей этих событий. Если $P_A(B) \neq P(B)$ – события A и B являются зависимыми.

Пример 5.. Имеются 3 ящика, которые содержат по 10 деталей. В первом ящике – 8, во втором – 7, а в третьем – 9 стандартных деталей. Из каждого ящика вынимают наудачу по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение.

События A, B, C – извлечение стандартной детали, соответственно, из 1-го, 2-го и 3-го ящика.

$P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$; $P(C) = 0{,}9$.

Поскольку события A, B и C – независимые то:

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

Section 2.

2.1. Statistical definition of probability

The traditional definition of probability is limited, because it applies only to those events that can occur as a result of experiments that have a symmetry of possible outcomes or, as it is commonly said, are reducible to a scheme of cases. In other words, each of these events is equally possible. For instance, in the case of experiments carried out with a dice it is assumed that it is made of a perfectly homogeneous material and has the shape of a regular cube. These assumptions make it clear that rolling and result of any of the faces is an event with the same probability of its occurrence. But in reality, tasks which make it possible to proceed from symmetry considerations are extremely rare. In this regard, along with the traditional definition of probability, a statistical definition is also used.

The statistical probability of any particular event A is usually called the relative frequency of that event occurring in an experiment. Let us assume that an event A may occur in some experiment. Let us also assume that n experiments are performed in which the event A occurs m times. The number m is called the frequency of event A, and the number $\widetilde{P}(A) = m/n -$ is the statistical probability of this event, which is the relative frequency (occurrence frequency) of A in n experiments performed.

It is worth noting that this definition of probability does not apply to any event with an uncertain outcome, but only to those with certain characteristics:

1). The events under consideration must be the outcomes of only those experiments that can be reproduced an unlimited number of times under the same set of conditions;

2). The events must possess statistical stability (stability of relative frequencies). This means that in different series of experiments, the relative frequency of the event must vary insignificantly, ranging close to a constant value;

3). The number of experiments leading to event A must be large enough, because only in this case we can assume that probability $\widetilde{P}(A)$ will be approximately equal to the relative frequency.

All those properties that derive from the traditional definition of probability are retained in its statistical definition:

1). the probability of a reliable event is equal to 1;

2). the probability of an impossible event is equal to 0;

3). If a random event C is the sum of a finite number of independent events A_1, $A_2,\ldots,A_n$, having probabilities $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_n)$, ..., respectively, then its probability is determined by the sum:

$$P(C) = P(A_1) + P(A_1) + ... + P(A_n)$$

2.2. Geometric definition of probability

The *traditional probability* concept is based on the consideration of a finite number of equally probable outcomes of an experiment. But in real practice, we often encounter experiments with an infinite number of possible outcomes. Therefore, there is another definition of probability: *geometric probability*.

Geometric probability is the probability of a point falling into some area (a segment, part of a plane, part of a body, etc.). Let us assume that there is some area *G* and it contains another area *G*. A point is tossed into the area *G* at random and it is required to determine that it will fall into the area *g*. This means that the point can fall into any point of area *G*, and the probability of falling into any part of the area *g* is proportional to the measure of the area (length, size, etc.) and does not depend on its location and shape.

Definition says that the *geometric probability* of the event *A* in question (in this case, a point falling into area *g*) is the ratio of the area measure favorable for the occurrence of event *A* to the measure of the whole area:

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$$

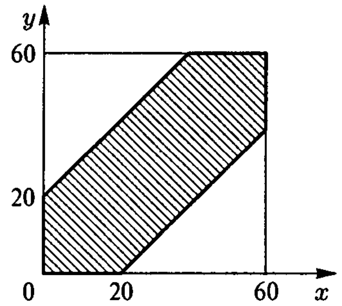
Let's look at the following particular examples.

Example 1. *The task about the meeting*. Two persons I and B agreed to meet at a certain place between 12:00 and 13:00. They agreed that the person who came first would wait for the other person for 20 minutes, and then would leave. Question: What is the probability of these persons meeting, if the arrival of each of them during the specified hour can happen at random and the moments of arrival are independent (i.e. the moment of one person's arrival does not affect the moment of the other person's arrival)?

Solution. May x and $y-$ be the moments of arrival of persons A and B, respectively. In order for the meeting to occur, it is necessary and sufficient that the following condition is satisfied:

$$|x - y| \leq 20$$

In the Oxy coordinate system, we will assume that the starting point is 12-00, and we will choose the minute as the unit of scale. In this case, the possible outcomes will be represented by points of a square with sides 60. The outcomes favorable to the meeting are located in the shaded area.



The required probability would be determined by the ratio of the shaded figure area to the area of the whole square:

$$P = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9} \approx 0{,}555$$

(That is, the moment of one person's arrival does not affect the moment of another person's arrival.)

2.3. Conditional probability of an event. The probability multiplication theorem. Independent events.

Definition: *The conditional probability of any event is its probability in case another event has already occurred.*

The notation $P_A(B)$ or $P(B/A)$ is used for the conditional probability. Let us obtain the formula for its calculation. Let us assume that some experiment is performed, the total number of equally possible and independent outcomes (cases) of which is equal to n. May m events of these n be favorable to event A, and k events be favorable to event B. In this case, the joint occurrence of events A and B, i.e., the event AB, is favored by l events ($l \le m$, $l \le k$).

Then, according to the traditional definition of probability: $P(A) = m/n$; $P(AB) = l/n$.

The number of all equally possible outcomes (cases) decreased from n to m after event A occurred. Meanwhile, the number of cases favorable to the event B has decreased from k to l. Therefore, the conditional probability is

$$P_A(B) = l/m = P(AB)/P(A) \qquad (10)$$

Similarly

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) \qquad (11)$$

When multiplying the right and left parts of equations (1) and (2) by $P(A)$ and $P(B)$, respectively, we shall obtain

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A)$$

I.e.:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \tag{12}$$

The last equation represents an analytical expression of the **probability multiplication theorem (rule).**

Pursuant to this theorem, *the product probability of two events is equal to the product of one event's probability over the conditional probability of the other, which is found under the assumption that the first event has already occurred.*

When there is an arbitrary number of events (i.e., more than two), the probability multiplication theorem is easily generalized and formulated as follows:

The product probability of several events is equal to the product of the probability of one of these events by the conditional probabilities of the others:

$$P(ABC...KL) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)....P_{ABC...N}(L) \tag{13}$$

(Each subsequent event probability is determined under the assumption that all previous events have occurred).

It does not matter which event is the first, the second, etc. This means that the order in which the events are placed can be chosen freely.

The probability multiplication theorem takes the simplest form when the events forming the product are *independent.*

Event B is called independent of event A, if its probability remains the same whether event A occurs or not, i.e. $P_A(B) = P(B)$. (If this equality is not true, then the event B is called dependent on A).

Several events A, B,..., L are called independent if any two of them are independent and any of the given events and any product of the other events are independent.

The rule (theorem) for multiplication of probabilities for two (3) and several (4) events for independent events is as follows:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(ABC...KL) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)....P(L)$$

It means that a product probability of two or more independent events is equal to the product of the probabilities of those events.

Let's look at the following particular examples.

Example 2. There are three white balls and three black balls in the box. One ball is taken out of the box twice, without putting it back. Find the probability that a white ball would appear in the second experiment (event *B*), if a black ball was taken out in the first experiment (event *A*).

Solution. There are 5 balls in the box after the first experiment, 3 of them are white. Thus, the unknown conditional probability

$$P_A(B) = 3/5$$

One can obtain the same result by formula (1). Previously, we note that the total number of outcomes, i.e., the joint appearance of two balls (whatever is the color) is determined by the number of placements $A_6^3 = 6 \cdot 5 = 30$. Given this number of outcomes, the event AB, in which a black ball appears in the first experiment and a white one in the second experiment, is favored by $3 \cdot 3 = 9$ outcomes. Therefore, $P(AB) = 9/30 = 3/10$. Then, the required conditional probability is

$$P_A(B) = P(AB)/P(A) = (3/10)/(1/2) = 3/5$$

Example 3. A student is required to pass a math test and an exam. The probability of passing the test is 0.8. If the test is passed, the student is allowed to take the exam, the probability of passing the exam for the student is 0.9. What is the probability that the student will pass both the test and the exam?

Solution. Let's introduce the following events:

A is the student's passing of the test, then $P(A) = 0,8$;

B is the student's passing an exam after A, then $P_A(B) = 0{,}9$, since the event B depends on A, then $P(AB) = P(A)P_A(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$.

Example 4. The probability of hitting the target by each of the three cannons is equal to $P_1 = 0{,}8$; $P_2 = 0{,}7$; $P_3 = 0{,}9$ respectively. Find the probability of at least one hit at one salvo from all the cannons.

Solution.

May the events A_1, A_2, A_3 be the hits of the first, second and third cannon, then $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}9$. In this case, the events $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ are misses of the first, second, and third cannon, respectively. Therefore

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 = q_1;$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 = q_2;$$

$$P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 = q_3.$$

Event A is the event that at least one cannon hits the target, then the opposite event $\overline{A}$ will be the event where all three cannons miss the target, i.e. $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$

Then $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}3_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$

The desired probability $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

When the events are independent, like the probability of event B does not depend on the occurrence of event A, the multiplication theorem (11) takes the following form

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{14}$$

since the conditional probability of event B in this case is equal to its unconditional probability: $P_A(B) = P(B)$. Equality (14) may be used as the definition of independent events. Two events would be independent if their joint occurrence probability is equal to the product of the probabilities of those events. If $P_A(B) \neq P(B)$, then events A and B are dependent.

Example 5. There are 3 boxes that contain 10 parts each. The first box contains 8, the second box contains 7, and the third box contains 9 standard parts. One part is taken out of each box at random. Find the probability that all three parts taken out are standard parts.

***Solution*.**

Events A, B, C mean taking out a standard part from the 1st, 2nd and 3rd boxes, respectively.

$$P(A) = 0{,}8; \qquad P(B) = 0{,}7; \qquad P(C) = 0{,}9.$$

Since events A, B and C are independent, then:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Раздел 3.

3.1. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

<u>Теорема:</u> Вероятность события A, которое может наступить только при условии наступления одного из несовместных событий B_1, $B_2, \dots B_n$, которые образуют полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) \qquad (15)$$

Формулу (15) принято называть *формулой полной вероятности*.

Пример 1. Партия деталей содержит: 20% деталей, изготовленных заводом № 1; 30% деталей, изготовленных заводом № 2; 50% деталей, изготовленных заводом № 3.

Соответственные вероятности выпуска бракованных деталей составляют: 0,05; 0,01; 0,06. Чему равна вероятность того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной ?

Решение. Обозначим следующие события:

A – выпуск бракованной детали,

B_1 – деталь с завода № 1 $\quad P(B_1) = 20/100 = 0{,}2$;

B_2 – деталь с завода № 2 $\quad P(B_2) = 30/100 = 0{,}3$;

B_3 – деталь с завода № 3 $\quad P(B_3) = 50/100 = 0{,}5$.

Поскольку, согласно условию задачи:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}05;\; P_{B_2}(A) = 0{,}01;\; P_{B_3}(A) = 0{,}06;$$

То, согласно (15), можно записать следующее равенство:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_n)P_{B_n}(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 = 0{,}043$$

Итак, имеется какое-то событие A, которое может наступить только при условии появления одного из несовместных событий B_1, $B_2, \dots B_n$ образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое именно из этих событий наступит, их принято называть *гипотезами*.

Теперь предположим, что испытание было произведено и, в результате, появилось событие A. Определим, каковы вероятности гипотез в связи с тем, что событие A уже наступило, т. е., вычислим условные вероятности : $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, …, $P_A(B_i)$, …, $P_A(B_n)$; $(i = 1,...,n)$.

Далее, учитывая то условие что события A и B_i зависимые, и применяя теорему умножения зависимых событий, получим выражение:

$$P(AB_i) = P(A) \cdot P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A),$$

из которого получается следующая формула

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} \tag{16}$$

где $P(A)$ – полная вероятность наступления события A.

Формула (16), получившая название формулы Байеса, позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 2. На сборку поступают детали с 3-х станков. При этом, 50% деталей поступает с 1-го станка, дающего 1% брака; 30% деталей поступает со 2-го станка, дающего 2% брака и 20% деталей поступает с 3-го станка, дающего 1,5% брака.

Из поступивших на сборку деталей бала наудачу извлечена одна деталь, которая оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена

а) на 1 станке; б) на 2 станке; в) на 3 станке.

Решение. Обозначим следующие события:

A – бракованная деталь.

B_1 – деталь изготовлена на 1 станке; $P(B_1) = 50/100$; $P_{B_1}(A) = 1/100$.

B_2 – деталь изготовлена на 2 станке; $P(B_2) = 30/100$; $P_{B_2}(A) = 2/100$.

B_3 – деталь изготовлена на 3 станке; $P(B_3) = 20/100$; $P_{B_3}(A) = 15/100$.

тогда $P(A) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,015 = 0,014$.

Вычислим вероятности гипотез, что извлеченная сборщиком бракованная деталь изготовлена

а) на 1-ом станке, а именно:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,014} = 0,357;$$

б) на 2-ом станке:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,014} = 0,429;$$

в) на 3-ем станке:

$$P_A(B_3) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,015}{0,014} = 0,214.$$

Правильность вычислений подтверждается тем, что:

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) + P_A(B_3) = 1$$

3.2. Повторные независимые испытания. Приближенные формулы для расчета вероятности.

3.2.1. Формула Бернулли.

Предположим что производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо наступит либо не наступить. Пусть вероятность наступления события A в каждом испытании равна $P(A) = p$, тогда вероятность того что это событие не наступит: $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Поставим перед собой следующую задачу: вычислить вероятность того, что при n испытаниях, событие A осуществится k раз и, следовательно, не осуществится $(n-k)$ раз. При этом, не требуется чтобы событие A повторилось ровно k раз в определенной последовательности. Последовательность может меняться включая появление и непоявление события A. Эта вероятность вычисляется по следующей формуле получившей название формулы Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{17}$$

При решении каждой задачи по теме данного параграфа, прежде всего, необходимо установить, что рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли, т. е. необходимо проверить, что: 1) проводимые испытания независимы; 2) каждое испытание имеет два исхода; 3) вероятность появления события в каждом испытании постоянна и равна P.

При больших значениях n, вычисление вероятностей $P_n(k)$ с помощью формулы Бернулли оказывается довольно сложным. Поэтому оно проводится с помощью других приближенных формул.

3.2.2. Формула Пуассона.

В том случае, если количество испытаний велико $n \to \infty$, а вероятность события мала $p \to 0$, так что $np \to a$, $0 < a < \infty$ и $p \le 1/\sqrt{n}$, то используется приближенная *формула Пуассона:*

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{18}$$

3.2.3. Формулы Муавра-Лапласа.

Если количество испытаний велико $n \to \infty$, а вероятности p и q достаточно большие, так что выполняются условия: $0 < np - 3\sqrt{npq}$ и $np + 3\sqrt{npq} < n$, то применяют следующие приближенные формулы *Муавра-Лапласа:*

– *локальная* $P_n(k) \approx \dfrac{f(x)}{\sqrt{npq}}$,

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса;

– *интегральная* $P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left[\dfrac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\dfrac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}\right]$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функция Лапласа.

Функция $f(x)$ – четная ($f(x)=f(-x)$), а $\Phi(x)$– нечетная ($-\Phi(x)=\Phi(-x)$). Обе функции табулированы (представлены в таблицах Приложения любого учебного пособия).

Пример 3. Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии:

1) не превысит нормы в течение: а) 4-х суток; б) от 3-х до 4-х суток.

Решение: 1. Введем событие A– это нормальный расход энергии в течение суток, поэтому $P(A)=0{,}75$. Тогда событие $\overline{A}$ – превышение нормы расхода электроэнергии в течение суток, то есть:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}75=0{,}25.$$

Ответим на поставленные вопросы задачи:

а) число испытаний $n=6$

Событие A наступит 4 раза, т. е. $k=4$, $\Rightarrow$ $p=P(A)=0{,}75$; $q=P(\overline{A})=0{,}25$

Используя формулу Бернулли (17), получим:

$$P_6(4)=C_6^4p^4q^2=\frac{6!}{2!4!}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=0{,}30$$

б) число испытаний $n=6$.

Событие A наступит от 3-х до 4-х раз, то есть $3\le k\le 4$, тогда $p=P(A)=0{,}75$; $q=P(\overline{A})=0{,}25$.

Используя представленные выше формулы, получим:

$$P_6(3\le k\le 4)=P_6(3)+P_6(4)=C_6^3\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25^3+C_6^4\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=$$
$$=0{,}131+0{,}30=0{,}431$$

3.3. Наивероятнейшее число появления события

При решении задач, часто приходится вычислять так называемое *наивероятнейшее* числом появления того или иного события.

Определение: Наивероятнейшим принято называть число m_0 наступлений события A при n повторных независимых испытаниях если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$, по крайней мере, не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m.

Выведем формулу для наивероятнейшего числа m_0 наступлений события A при n повторных независимых испытаниях, учитывая

$$P(A) = p \ ; \ P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

По определению:

$$P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1) \qquad (19)$$

$$P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1) \qquad (20)$$

С помощью формулы Бернулли, из неравенства (19) получим:

$$\frac{n!}{m_0! \cdot (n - m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0 - 1)! \cdot (n - m_0 + 1)!} \cdot p^{m_0 - 1} \cdot q^{n-m_0+1}$$

Или, после сокращений: $\frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n - m_0 + 1}$

Тогда: $p(n + 1) \geq m_0(p + q)$, или учитывая, что $p + q = 1$:

$$m_0 \leq p(n+1) \qquad (21).$$

По формуле Бернулли, из неравенства (20), получим:

$$\frac{n!}{m_0! \cdot (n - m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0 + 1)! \cdot (n - m_0 - 1)!} \cdot p^{m_0 + 1} \cdot q^{n-m_0-1}$$

Или, после сокращений: $\frac{p}{n - m_0} \geq \frac{q}{m_0 + 1}$.

Тогда: $pn - q \leq m_0(p + q)$, или учитывая, что $p + q = 1$, получим:

$$m_0 \geq pn - q \qquad (22).$$

Совмещая полученные решения двух неравенств получим формулу для определения границы числа m_0:

$$np - q \leq m_0 \leq p(n+1), \text{ или } p(n+1) - 1 \leq m_0 \leq p(n+1) \quad (23)$$

Поскольку разность $np+p-(np-q)=p+q=1$, то всегда существует целое число m_0 удовлетворяющее (22). При этом, если $np+p-$целое число, то наивероятнейших чисел два: $m_0=np+p$ и $m_0=np-q$.

Пример 4. Вероятность попадания орудия равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение*:* Здесь: $n=50$; $p=0{,}9$; $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$; $m_0=?$

По формуле (23) получим: $50 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 0{,}9 \cdot (50+1)$.

Тогда: $44{,}9 \le m_0 \le 45{,}9$. Следовательно: $m_0 = 45$.

Пример 5. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания в отдельном выстреле равна 0,7 ?

Решение: Здесь: $m_0=16$; $p=0{,}7$; $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$; $n=?$

По формуле (23) получим: $0{,}7 \cdot n - 0{,}3 \le 16 \le 0{,}7 \cdot (n+1)$.

Из решения поочерёдно левого и правого неравенств получим: $n \le 23\frac{2}{7}$;

$n \ge 21\frac{6}{7}$. Тогда получим: $n_1=22$; $n_2=23$. То есть число выстрелов может быть 22 или 23.

3.4. Случайные величины.

Если рассмотреть какое-либо испытание, то его качественной характеристикой является связанное с ним случайное событие, а количественной характеристикой – связанная с ним случайная величина. Например, подбрасывание игральной кости представляет собой испытание, для которого случайное событие – выпадение одной из шести граней, а случайная величина – выпавшее на этой грани количество очков. Рассмотрим основные определения

Определение 1. *Случайная величина представляет собой переменную, которая может принимать в зависимости от исходов испытания различные случайные значения.*

Принято различать *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Определение 2. *Дискретной случайной величиной принято называть ту, которая в процессе испытания принимает отдельные, изолированные* *возможные значения с определенными вероятностями, причем, число этих значений может быть либо конечным, либо бесконечным.*

Определение 3. *Непрерывной принято называть случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.*

Множество значений дискретной случайной величины представляет собой конечную или бесконечную числовую последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом, вероятность того что случайная величина примет какое-либо конкретное значение x_i обозначается символом: $P(x_i)$.

Определение 4. *Функцией распределения случайной величины* X называется *функция* $F(X)$, *которая, для каждого значения* x *выражает вероятность того, что случайная величина* X *примет значение меньшее* x*., т.е.* $F(X) = P(X < x)$.

Section 3.

3.1. Total probability formula. Bayes formula.

Theorem: The probability of event A, which may occur only in case of one of the disjoint events B_1, B_2,…. B_n, which form a complete group, is equal to the sum of the probability products of each of these events by the corresponding conditional probability of the event A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) \qquad (15)$$

Formula (15) is commonly referred to as the *total probability formula*.

Example 1. A batch of parts contains: 20% of parts manufactured by Plant #1; 30% of parts manufactured by Plant #2; 50% of parts manufactured by Plant #3.

The relative probabilities of producing defective parts are: 0.05; 0.01; 0.06. What is the probability that a part taken at random from the batch will be defective?

Solution. Let us denote the following events:

A – defective part production,

B_1 – part from Plant #1 $\quad P(B_1) = 20/100 = 0{,}2$;

B_2 – part from Plant #2 $P(B_2) = 30/100 = 0{,}3$;

B_3 – part from Plant #3 $P(B_3) = 50/100 = 0{,}5$.

According to the task condition:

$P_{B_1}(A) = 0{,}05$; $P_{B_2}(A) = 0{,}01$; $P_{B_3}(A) = 0{,}06$;

Then, following (15), we can write down the following equality:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_n)P_{B_n}(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 = 0{,}043$$

Therefore, there is an event A, which may occur only in case of one of the disjoint events B_1, $B_2, \ldots B_n$, forming a complete group. Since it is not known in advance which of these events will occur, they are called *hypotheses*.

Now we assume that the experiment has been performed and, as a result, the event A has occurred. Let us determine what are the probabilities of the hypotheses due to the fact that the event A has already occurred, i.e., let us calculate the conditional probabilities: $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, …, $P_A(B_i)$, …, $P_A(B_n)$; $(i = 1, \ldots, n)$.

Then, given the condition that events A and B_i are dependent, and using the multiplication theorem for dependent events, we obtain the expression

$P(AB_i) = P(A) \cdot P_A(B_i) = P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$,

from which the following formula is derived

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)} \tag{16}$$

In which $P(A)$ is the total probability of event A occurrence.

The formula (16), called the Bayes formula, allows you to re-estimate the probabilities of hypotheses after the outcome of experiment that resulted in the event A is known.

Example 2. Parts from three machines come in for assembly. In this case, 50% of the parts come from the 1st machine, giving 1% of rejects; 30% of the parts come from the 2nd machine, giving 2% of rejects and 20% of the parts come from the 3rd machine, giving 1.5% of rejects.

Among the parts that came in for assembly, one part was taken out at random and turned out to be defective. Find the probability that it was made

a) on machine 1; b) on machine 2; c) on machine 3.

Solution. Let us denote the following events:

A – defective part.

B_1 – the part is made on the 1st machine; $P(B_1)=50/100$; $P_{B_1}(A)=1/100$.

B_2 – the part is made on the 2nd machine; $P(B_2)=30/100$; $P_{B_2}(A)=2/100$.

B_3 – the part is made on the 3rd machine; $P(B_3)=20/100$; $P_{B_3}(A)=15/100$.

then $P(A)=0{,}5\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}2\cdot 0{,}015=0{,}014$.

Let's calculate the hypotheses probabilities that the defective part taken out by the assembler was made

a) on the 1st machine, namely:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}01}{0{,}014}=0{,}357;$$

b) on the 2nd machine:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}014}=0{,}429;$$

c) on the 3rd machine:

$$P_A(B_3)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}_3)\cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}015}{0{,}014}=0{,}214\cdot$$

The accuracy of the calculations is confirmed by:

$$P_A(B_1)+P_A(B_2)+P_A(B_3)=1$$

3.2. Repeated independent experiments. Approximate formulas for probability calculation.

3.2.1. Bernoulli's formula.

Let's assume that there are n independent experiments, in each of which the event A may or may not occur. May the occurrence probability of event A in each experiment be equal to $P(A)=p$, then the probability that the event will not occur is: $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Let us set the following task: to calculate the probability that event A will occur k times and consequently will not occur $(n-k)$ times in n trials. It is not required that event A be repeated exactly k times in a certain sequence. The sequence may vary, including the occurrence and non-occurrence of event A. This probability is calculated using the following formula, called Bernoulli's formula:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{17}$$

In solving each task on the topic of this paragraph, first of all, it is necessary to establish that the experiment in question satisfies the Bernoulli's scheme, i.e., it is necessary to ascertain that: 1) the performed experiments are independent; 2) each experiment has two outcomes; 3) the probability of the event occurring in each experiment is constant and equal to P.

When values of n are large, the calculation of probabilities $P_n(k)$ using Bernoulli's formula is rather complicated. That is why it is carried out with the help of other approximate formulas.

3.2.2. Poisson's formula.

If the number of experiments is large $n \to \infty$, and event probability is small $p \to 0$, so that $np \to a$, $0 < a < \infty$, and $p \le 1/\sqrt{n}$, then the approximate *Poisson's formula* is used

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} \tag{18}$$

3.2.3. De Moivre–Laplace formulas.

If the number of experiments is large $n \to \infty$, and the probabilities p and q are large enough so that the following conditions are satisfied: $0 < np - 3\sqrt{npq}$ and $np + 3\sqrt{npq} < n$, then the following approximate *De Moivre–Laplace formulas* are applied:

– *local* $P_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}$,

In which $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ is the Gaussian function;

– *integral* $P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left[\frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}\right]$

In which $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ is the Laplace function.

Function $f(x)$ is even ($f(x) = f(-x)$) and function $\Phi(x)$ is odd ($-\Phi(x) = \Phi(-x)$). Both functions are tabulated (presented in the tables of any textbook Annex).

Example 3. The probability of electricity consumption not exceeding the established norm for one day is 0.75. Find the probability that in the next 6 days the electricity consumption:

1) will not exceed the norm for: a) 4 days; b) 3 to 4 days.

Solution: 1. May the event A be the normal consumption of energy per day, so $P(A) = 0{,}75$. Then the event $\overline{A}$ is the exceeding of the normal energy consumption per day, i.e:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Let's answer the questions of the task:

a) number of experiments $n = 6$

Event A will occur 4 times, i. e. $k = 4$, $\Rightarrow$ $p = P(A) = 0{,}75$; $q = P(\overline{A}) = 0{,}25$

By using Bernoulli's formula (17), we get:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}30$$

b) number of experiments $n = 6$.

Event A will occur 3 to 4 times, that is $3 \le k \le 4$, then $p = P(A) = 0{,}75$; $q = P(\overline{A}) = 0{,}25$.

Using the above formulas, we get:

$$P_6(3 \le k \le 4) = P_6(3) + P_6(4) = C_6^3 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3 + C_6^4 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 =$$
$$= 0{,}131 + 0{,}30 = 0{,}431$$

3.3. The most probable number of event occurrence

When solving tasks, it is often necessary to calculate the so-called *most probable* number of event occurrence

***Definition**:* The most probable is the number m_0 of event A occurrences in n repeated independent experiments if the probability of that event $P_n(m_0)$ occurrence is at least equal to the probabilities of the other events $P_n(m)$ at any m.

Let's derive a formula for the most probable number m_0 of event A occurrences in n repeated independent experiments, given

$P(A) = p$; $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

According to definition:

$$P_n(m_0) \ge P_n(m_0 - 1) \qquad (19)$$

$$P_n(m_0) \ge P_n(m_0 + 1) \qquad (20)$$

By using Bernoulli's formula, from inequality (19) we get:

$$\frac{n!}{m_0! \cdot (n - m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge \frac{n!}{(m_0 - 1)! \cdot (n - m_0 + 1)!} \cdot p^{m_0 - 1} \cdot q^{n-m_0+1}$$

Or, after the shortcuts: $\dfrac{p}{m_0} \ge \dfrac{q}{n - m_0 + 1}$

Then: $p(n + 1) \ge m_0(p + q)$, or considering that $p + q = 1$:

$$m_0 \le p(n + 1) \qquad (21).$$

By using Bernoulli's formula, from inequality (20) we get:

$$\frac{n!}{m_0!\cdot(n-m_0)!}\cdot p^{m_0}\cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!\cdot(n-m_0-1)!}\cdot p^{m_0+1}\cdot q^{n-m_0-1}$$

Or, after the shortcuts: $\frac{p}{n-m_0} \geq \frac{q}{m_0+1}$.

Then: $pn-q \leq m_0(p+q)$, or considering that $p+q=1$, we get:

$$m_0 \geq pn - q \qquad (22).$$

By combining the obtained solutions of the two inequalities we obtain a formula for determining the limits of the number m_0:

$$np - q \leq m_0 \leq p(n+1),\ \text{or}\ p(n+1)-1 \leq m_0 \leq p(n+1) \qquad (23)$$

Since the difference is $np+p-(np-q) = p+q = 1$, there is always an integer m_0 which satisfies (22). In this case, if $np+p-$ is an integer, then there are two most probable numbers: $m_0 = np+p$ and $m_0 = np-q$.

Example 4. The probability of the cannon hitting the target is 0.9. Find the most probable number of hits after 50 shots.

Solution: In this case: $n = 50$; $p = 0,9$; $q = 1-p = 1-0,9 = 0,1$; $m_0 = ?$

Using formula (23) we get: $50\cdot0,9 - 0,1 \leq m_0 \leq 0,9\cdot(50+1)$.

Then: $44,9 \leq m_0 \leq 45,9$. Therefore: $m_0 = 45$.

Example 5. What number of shots gives the most probable number of hits equal to 16, if the probability of hitting a target by a single shot is 0.7?

Solution: Here: $m_0 = 16$; $p=0,7$; $q = 1-p = 1-0,7 = 0,3$; $n = ?$

Using formula (23) we get: $0,7\cdot n - 0,3 \leq 16 \leq 0,7\cdot(n+1)$.

By solving the left and right inequalities one by one, we get: $n \leq 23\frac{2}{7}$;

$n \geq 21\frac{6}{7}$. Then we get: $n_1 = 22$; $n_2 = 23$. That is, the number of shots may be 22 or 23.

3.4. Random variables.

If we consider an experiment, its qualitative characteristic is the random event related to it, and its quantitative characteristic is the random variable related to it. For example, rolling a die is an experiment, the random event of which is one of six faces, and the random variable of which is the number of points on that face. Let's review the basic definitions

Definition 1. *A random variable is a variable that can acquire different random values depending on the outcome of the experiment.*

It is accepted to distinguish between *discrete and continuous* random variables.

Definition 2. *A discrete random variable is defined as one that takes separate, isolated possible values with certain probabilities during an experiment, and the number of these values can either be finite or infinite.*

Definition 3. *A continuous random variable is usually called a random variable that can acquire all values from some finite or infinite interval. Obviously, the number of possible values of a continuous random variable is infinite.*

A set of values of a discrete random variable represents a finite or infinite numerical sequence $x_1, x_2, ..., x_n$. The probability that a random variable will acquire a particular value x_i is denoted by the symbol: $P(x_i)$.

Definition 4. *The distribution function of a random variable X is a function $F(X)$, which expresses the probability for each value of x, that the random variable X will acquire a value less than x. i.e. $F(X) = P(X < x)$.*

Раздел 4.
4.1. Дискретные случайные величины. Функция распределения.

Множество значений дискретной случайной величины представляет собой конечную или бесконечную числовую последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом, вероятность того что случайная величина примет какое-либо конкретное значение x_i (где $i = 1...n$) обозначается символом: $P(x_i)$.

Определение. *Функцией распределения случайной величины* X называется *функция* $F(X)$*, которая, для каждого значения* x *выражает вероятность того, что случайная величина* X *примет значение меньшее* x*., т.е.* $F(X) = P(X < x)$.

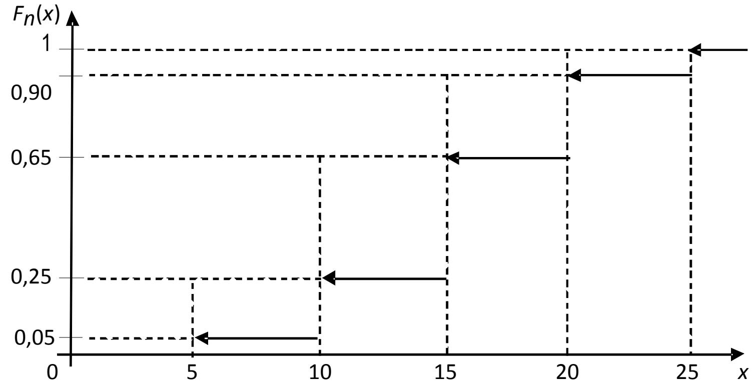
Пример 1. Анализируется прибыль X (%) предприятий отрасли. Результаты обследования $n = 100$ предприятий занесены в следующий вариационный ряд:

X	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
n_i	**5**	**20**	**40**	**25**	**10**
n_i / n	**0,05**	**0,2**	**0,4**	**0,25**	**0,1**

Необходимо определить функцию распределения $F(X)$ и построить ее график.

Решение:

$$P_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \\ 0{,}05 & 5 < x \le 10 \\ 0{,}2 & 10 < x \le 15 \\ 0{,}4 & 15 < x \le 20 \\ 0{,}25 & 20 < x \le 25 \\ 0{,}1 & x > 25. \end{cases} \Rightarrow F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \\ 0{,}05, & x \le 10 \\ 0{,}25, & x \le 15 \\ 0{,}65, & x \le 20 \\ 0{,}90, & x \le 25 \\ 1 & x < +\infty. \end{cases}$$



(Замечание. Стрелки могут быть также и слева от граничных линий. Все зависит от условий поставленной задачи.)

Согласно данному примеру, можно утверждать, *что функция распределения любой дискретной случайной величины представляет собой разрывную ступенчатую функцию, скачки которой имеют место в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции* $F(x)$ *равна единице.*

Приведем некоторые свойства функции распределения.

1. *Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:* $0 \le F(X) \le 1$;

2. *Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси:* $\lim\limits_{X \to -\infty} F(X) = 0$; $\lim\limits_{X \to +\infty} F(X) = 1$;

3. *Вероятность попадания случайной величины в интервал* $[x_1, x_2)$ (т.е. *включая* x_1) *равна приращению ее функции распределения на этом интервале:*

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

4.1.1.Законы распределения дискретных случайных величин.

Определение 1 *Соответствие между возможными значениями* $x_1, x_2, ..., x_n$ *дискретной случайной величины* X_i $(i = 1...n)$ *и соответствующими им вероятностями* $p_1, p_2, ..., p_n$ *представляет собой закон распределения этой величины.*

Закон распределения может быть задан в виде таблицы:

X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Поскольку события $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \dots X_n = x_n$ образуют полную группу событий, то:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся законы распределения случайных величин.

1. *Равномерное распределение вероятности случайной величины* X_i *принимающей* n $(i = 1...n)$ *значений*: $P_n(X = x_i) = 1/n$.

Пример 2. Составить закон распределения числа выпавших очков при одном подбрасывании игральной кости (кубика).

Решение: По условию случайная величина X_i $(i = 1...6)$ – количество выпавших очков. Следовательно, X_i имеет 6 различных значений, поскольку на каждой грани разное число очков: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$.

Вероятности выпадения этих случайных величин равны вероятности появления одной грани, то есть $1/6$, следовательно, закон распределения имеет вид:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Пример 3. Денежная лотерея содержит 10000 билетов, причем 1 билет выигрывает 1000 руб., 10 билетов – по 100 руб., а 100 билетов – по 1 руб. Составить закон распределения величины случайного выигрыша на один лотерейный билет.

Решение: В данном случае, случайной величиной X_i $(i = 1...4)$ является величина выигрыша на один лотерейный билет. Она имеет следующие значения $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, тогда:

$p_1 = p(x_1) = 1/10000 = 0{,}0001$;

$p_2 = p(x_2) = 10/10000 = 0{,}001$;

$p_3 = p(x_3) = 100/10000 = 0{,}01$; $p_4 = p(x_4) = (10000 - 111)/10000 = 0{,}9889$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}0001 + 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}9889 = 1$$

Следовательно, закон распределения величины выигрыша на 1 лотерейный билет будет иметь следующий вид:

x_i	1000	100	1	0
p_i	0,0001	0,001	0,01	0,9889

2. *Биномиальное распределение вероятности случайной величины* X_i*, значениями которой являются возможные значения числа* m появления события A при проведении n повторных независимых испытаний.

Эта вероятность задается формулой Бернулли:

$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0,1,2,...,n$.

В табличной форме:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Свое название данный закон распределения получил в связи с тем, что вероятности $P(X)$ совпадают с соответствующими слагаемыми бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + C_n^n p^n q^0.$$

А поскольку $p + q = 1$, то сумма вероятностей $\sum\limits_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} p_i = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = 1.$

Пример 4. Монета подброшена два раза. Составить закон распределения числа появлений герба.

Решение: Случайной величиной X будет число появлений герба при двукратном подбрасывании монеты. Очевидно, что герб может появиться от 0 до 2 раз, то есть случайная величина X принимает значения $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$, тогда:

$p(x_0) = C_2^0 (1/2)^0 (1/2)^2 = 0{,}25$; $p(x_1) = C_2^1 (1/2)^1 (1/2)^1 = 0{,}5$;

$p(x_2) = C_2^2 (1/2)^2 (1/2)^0 = 0{,}25$, т. к. $p = 1/2$, $q = 1/2$

Тогда закон распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Сделаем проверку: $\sum_{i=0}^{2} p_i = 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$..

3 *Распределение Пуассона*.

Предположим что имеется случайная величина X, которая представляет собой число появлений некоторого события A при n независимых испытаниях. В каждом таком испытании, вероятность появления события A очень мала, т. е. $P \to 0$. Случайная величина X может принимать значения от 0 до n, а вероятность ее наступления определяется по следующей формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np$$

известной как формула Пуассона.

При этом, закон распределения случайной величины X, представленный в табличной форме, имеет вид:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

называется распределением Пуассона.

4.1.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Для дискретных случайных величин применяют такие числовые характеристики как *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*.

–*Математическое ожидание.*

Определение 2. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X представляет собой сумму произведений всех возможных значений этой величины X_i $(i = 1 - n)$ на соответствующие им вероятности p_i:*

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. *Математическое ожидание постоянной величины С равно самой этой величине:* $M(C)=C$;

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:* $M(CX)=CM(X)$;

3. *Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин* $X_1, X_2, ..., X_n$ равно произведению математических ожиданий сомножителей: $M(X_1, X_2, ..., X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot .....\cdot M(X_n)$;

4. *Математическое ожидание суммы случайных величин* $X_1, X_2, ..., X_n$ *равно сумме математических ожиданий слагаемых:* $M(X_1+X_2+,...,+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+.....+M(X_n)$.

–*Дисперсия*

Определение 3. *Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:* $D(X)=M[X-M(X)]^2$.

Дисперсию удобно вычислять с помощью следующей формулы: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. *Дисперсия постоянной величины равна нулю:* $D(C)=0$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:* $D(CX)=C^2D(X)$;

3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин* $X_1, X_2, ..., X_n$ *равна сумме дисперсий слагаемых:*

$$D(X_1+X_2+,...,+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+.....+D(X_n)$$

Замечания:

1. Если рассматривать биноминальный закон распределения случайной величины, то дисперсия будет равна произведению числа испытаний n на вероятность появления p и непоявления q события в одном испытании: $D(X)=npq$

2. Если рассматривать распределение случайной величины, по закону Пуассона, то: $D(X) = \lambda = np$

–Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Определение 4. *Средним квадратичным отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Очевидно, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности рассматриваемой случайной величины. А поскольку среднее квадратичное отклонение равно квадратному корню из дисперсии случайной величины X, то размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. В связи с этим, в тех случаях, когда желательно чтобы оценка рассеяния имела размерность изучаемой случайной величины, вычисляют $\sigma(X)$, а не $D(X)$.

Если случайная величина распределена по биноминальному закону, то $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пример 5. Случайная величина X задана законом распределения.

Найти $\sigma(X)$.

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Решение:

1. Математическое ожидание X: $M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

2. Математическое ожидание X^2: $M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$.

3. Дисперсия $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$.

4. Искомое среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61.$$

4.2. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.

Определение. *Непрерывной называется такая случайная величина* X , *для которой функция распределения непрерывна.*

В данном случае, производную от функции распределения случайной величины принято называть плотностью распределения вероятности.

$\varphi(x) = F'(x)$

В отличии от функции распределения, понятие *плотность вероятности* существует только для непрерывных случайных величин. *Интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице:* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.

Плотность вероятности непрерывной случайной величины обладает следующими свойствами.

1. *Плотность вероятности – неотрицательная функция, т.е.* $\varphi(x) \geq 0$*;*

2. *Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал* $[a,b]$ *равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от* a *до* b*, т.е.* $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$.

3. *Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по представленной выше формуле формуле, при* $a \to -\infty$*, если верхний предел* b *заменить на переменный предел* x *:*

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$

Приведем основные числовые характеристики непрерывных случайных величин.

–<u>Математическое ожидание:</u>

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $\varphi(x)$ называется следующий определенный интеграл $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$.

–<u>Дисперсия:</u>

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от среднего значения

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \varphi(x) dx .$$

Однако, часто оказывается удобнее проводить вычисления по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx - [M(X)]^2 .$$

–Среднее квадратическое отклонение:

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины принято называть корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$$

Если величина $Z = f(X)$ представляет собой функцию случайного аргумента X, который имеет плотность вероятности $\varphi(x)$, то ее математическое ожидание и дисперсия определяются по следующим формулам:

$$M(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

$$D(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\varphi(x) dx - [M(Z)]^2$$

Пример 6. Случайная величина X задана плотностью вероятности $\varphi(x) = (1/2)x - 5$ в интервале $(10,12)$, вне этого интервала $\varphi(x) = 0$. Требуется определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение: Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{10}^{12} x((1/2)x - 5) dx = 11{,}33333333 ;$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_{10}^{12} x^2 ((1/2)x - 5) dx - [M(X)]^2 = 0.5\int_{10}^{12} x^2 dx - 5\int_{10}^{12} x^2 dx - [\int_{10}^{12} x((1/2)x - 5) dx]^2 =$$
$$= 0{,}2222226$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}2222226} \approx 0{,}471 .$$

Пример 7. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ A\sin x & при \quad 0 < x \le \pi, \\ 0 & при \quad x > \pi \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$, предварительно вычислив значение параметра A.

Решение: Поскольку все значения случайной величины X принадлежат интервалу $]10,\pi[$. то $\int_0^{\pi} A\sin x dx = 1 \Rightarrow A = 1/2$.

Интегральная функция определяется следующим образом:

При $x \le 0$, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dx = 0$;

При $0 < x \le \pi$, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_0^x (1/2)\sin x dx = (1/2)(1 - \cos x)$;

При $x > \pi$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_0^x (1/2)\sin x dx + \int_{\pi}^{x} 0 dx = 1$.

Следовательно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ (1/2)(1-\cos x) & при \quad 0 < x \le \pi, \\ 0 & при \quad x > \pi \end{cases}$$

Section 4.
4.1. Discrete random variables. Distribution function.

The set of discrete random variable values is a finite or infinite numerical sequence $x_1, x_2, ..., x_n$. In this case, the probability that a random variable will acquire any particular value x_i (where $i = 1 ... n$) is denoted by the symbol: $P(x_i)$.

Definition. *A random variable X has a distribution function called $F(X)$, which expresses the probability for each value of x, that the random variable X will acquire a value less than x., i.e. $F(X) = P(X < x)$.*

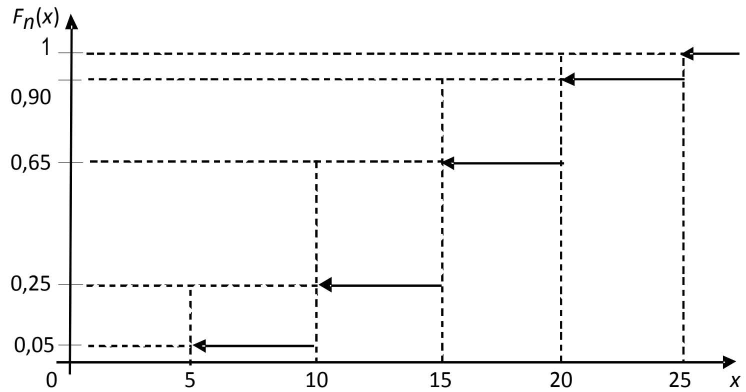
Example 1. Profit X (%) of the industry enterprises is analyzed. The following variation series represents the results of survey of $n = 100$ enterprises:

X	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
n_i	**5**	**20**	**40**	**25**	**10**
n_i/n	**0,05**	**0,2**	**0,4**	**0,25**	**0,1**

IT IS NECESSARY TO DETERMINE THE DISTRIBUTION FUNCTION $F(X)$ AND PLOT ITS GRAPH.

SOLUTION:

$$P_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 5\\ 0,05 & 5<x\le 10\\ 0,2 & 10<x\le 15\\ 0,4 & 15<x\le 20\\ 0,25 & 20<x\le 25\\ 0,1 & x>25.\end{cases} \Rightarrow F_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 5\\ 0,05, & x\le 10\\ 0,25, & x\le 15\\ 0,65, & x\le 20\\ 0,90, & x\le 25\\ 1 & x<+\infty.\end{cases}$$



(Note. The arrows can also be to the left of the baselines. It all depends on the conditions of the task).

According to this example, we can say that *the distribution function of any discrete random variable is a discontinuous step function whose steps take place at points corresponding to possible values of the random variable and are equal to the probabilities of these values. The sum of all steps of* $F(x)$ *function is equal to 1.*

Below are some properties of the distribution function.

1. *The random variable distribution function is a non-negative function contained between 0 and 1.:* $0\le F(X)\le 1$;

2. *The random variable distribution function is a non-decreasing function on the entire numeric axis:* $\lim\limits_{X\to-\infty} F(X)=0$; $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X)=1$;

3. *The probability of a random variable being in the interval* $[x_1,x_2)$ *(i.e. including* x_1*) is equal to the increment of its distribution function on that interval*

$P(x_1\le X\le x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

4.1.1. Discrete random variables distribution laws.

Definition 1. *The variable distribution law is the correspondence between the possible values* $x_1, x_2, ..., x_n$ *of a discrete random variable* X_i $(i = 1..n)$ *and their corresponding probabilities* $p_1, p_2, ..., p_n$.

The distribution law may be specified in the form of a table:

X_i	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Since the events $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2, \dots X_n = x_n$ form a complete group of events, then:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Here are some of the most common random variables distribution laws.

1. *A uniform probability distribution of a random variable* X_i *acquiring* n $(i = 1..n)$ *values:* $P_n(X = x_i) = 1/n$.

Example 2. Formulate the distribution law of the number of points scored with a single roll of the die.

Solution: According to the condition, the random variable X_i $(i = 1...6)$ – is the number of points rolled. Therefore, X_i has 6 different values, because each face has a different number of points: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$.

The probabilities of these random variables occurring are equal to the probability of one edge occurring, i.e. $1/6$, hence, the distribution law has the following form:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

It is obvious that $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Example 3. A money lottery consists of 10000 tickets, with 1 ticket winning 1000 rubles, 10 tickets winning 100 rubles, and 100 tickets winning 1 ruble. Formulate the distribution law of the random prize value per lottery ticket.

Solution: In this case, the random variable X_i $(i = 1...4)$ is the value of the prize per lottery ticket. It has the following values $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, then: $p_1 = p(x_1) = 1/10000 = 0{,}0001$;

$p_2 = p(x_2) = 10/10000 = 0{,}001$;

$p_3 = p(x_3) = 100/10000 = 0{,}01$; $p_4 = p(x_4) = (10000 - 111)/10000 = 0{,}9889$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}0001 + 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}9889 = 1$$

Consequently, the distribution law of the prize per lottery ticket will be as follows:

x_i	1000	100	1	0
p_i	0,0001	0,001	0,01	0,9889

2. *The binomial probability distribution of a random variable* X_i, *whose values are the possible values of the number* m *of event* A in n repeated independent experiments.

This probability is given by Bernoulli's formula:

$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0,1,2,...,n$.

In tabular form:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^n p^n q^0$

This distribution law got its name due to the fact that the probabilities $P(X)$ coincide with the corresponding terms of Newton's binomial:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + ... + C_n^n p^n q^0.$$

And since $p + q = 1$, the sum of the probabilities is $\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = 1$.

Example 4. The coin is tossed twice. Formulate the distribution law for the number of coat of arms appearances.

Solution: The random variable X will be the number of coats of arms appearing when the coin is tossed twice. Obviously, the coat of arms can appear from 0 to 2 times, that is, the random variable X takes values $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$, then:

$p(x_0) = C_2^0(1/2)^0(1/2)^2 = 0{,}25$; $p(x_1) = C_2^1(1/2)^1(1/2)^1 = 0{,}5$;

$p(x_2) = C_2^2(1/2)^2(1/2)^0 = 0{,}25$, т. к. $p = 1/2,\ q = 1/2$

Then the distribution law is:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

Let's check it: $\sum_{i=0}^{2} p_i = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$..

3. *Poisson's distribution.*

Let us assume that there is a random variable X, which represents the number of occurrences of some event A in n independent experiments. In each such experiment, the probability of event A occurrence is very small, i.e., $P \to 0$. The random variable x can acquire values from 0 to n, and its occurrence probability is determined by the following formula

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ in which } \lambda = np$$

known as Poisson's formula.

In this case, the random variable X distribution law, represented in tabular form, is:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

is called the Poisson's distribution.

4.1.2. Numerical characteristics of discrete random variables.

Such numerical characteristics as *mathematical expectation, variance, and standard deviation* are used for discrete random variables.

– *Mathematical expectation.*

Definition 2. *The mathematical expectation of a discrete random variable is the sum of the products of all possible values of that variable* X_i $(i=1-n)$ *by their corresponding probabilities* p_i*:*

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

The mathematical expectation has the following properties:

1. *The mathematical expectation of a constant value C is equal to the very value:* $M(C)=C$;

2. *The constant multiplier can be taken beyond the sign of mathematical expectation:* $M(CX)=CM(X)$;

3. *Mathematical expectation of the product of mutually independent random variables* $X_1, X_2,..., X_n$ is equal to the product of mathematical expectations of the factors: $M(X_1, X_2,..., X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ..... \cdot M(X_n)$;

4. The mathematical expectation of the random variables sum $X_1, X_2,..., X_n$ is equal to the sum of the mathematical expectations of the summands*:* $M(X_1 + X_2 +,...,+X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$.

– <u>*Variance*</u>

Definition 3. *The variance (dispersion) of a discrete random variable is the mathematical expectation of the squared deviation of a random variable from its mathematical expectation:* $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

It is easy to calculate the variance using the following formula: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

The variance has the following properties:

1. *The variance of a constant value is equal to 0:* $D(C)=0$.

2. *The constant multiplier can be taken out of the variance sign, having previously squared it:* $D(CX) = C^2 D(X)$;

3. *The variance of the sum of independent random variables* $X_1, X_2,..., X_n$ *is equal to the sum of the summands' variances:*

$$D(X_1 + X_2 +,...,+X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$$

Notes:

1. If we consider the binomial distribution law of a random variable, then the variance will be equal to the product of the number of experiments n by the probability of occurrence p and non-occurrence q of event in one experiment

$D(X) = npq$

2. If we consider the distribution of a random variable according to Poisson's law, then: $D(X) = \lambda = np$

– *Standard deviation*

In addition to the variance, some other characteristics are used to estimate the variance of possible values of a random variable around its mean value. These include the standard deviation.

Definition 4. *The standard deviation of a random variable X is the square root of the variance:*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Obviously, the variance has a dimension equal to the square of the random variable' s dimensionality. And since the standard deviation is equal to the square root of the variance of X random quantity, $\sigma(X)$ dimension coincides with X dimension. Therefore, in cases when it is desirable for the estimation of variance to be in the dimension of the studied random variable, $\sigma(X)$ is calculated instead of $D(X)$.

If a random variable is distributed according to the binomial law, then $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Example 5. A random variable X is given by the distribution law.

Find $\sigma(X)$.

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Solution:

1. Mathematical expectation X: $M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

2. Mathematical expectation X^2: $M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$.

3. Variance $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$.

4. The required root mean square deviation:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$$

4.2. Continuous random variables and their numerical characteristics.

Definition. *A random variable X, for which the distribution function is continuous is called continuous.*

In this case, the derivative of the distribution function of a random variable is called the probability distribution density.

$$\varphi(x) = F'(x)$$

Unlike the distribution function, the concept of probability density applies only to continuous random variables. The infinite integral of the probability density of a continuous random variable is equal to 1.: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.

The probability density of a continuous random variable has the following properties.

1. *The probability density is a non-negative function, i.e.* $\varphi(x) \geq 0$*;*

2. *The probability of a continuous random variable being in the interval* $[a,b]$ *is equal to a certain integral of its probability density within* a *to* b*, i.e.* $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$

3. *The distribution function of a continuous random variable can be expressed through its probability density using the formula given above, when* $a \to -\infty$*, if the upper limit* b *is replaced by a variable limit* x *:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$$

Here are the basic numerical characteristics of continuous random variables.

– Mathematical expectation:

The mathematical expectation of a continuous random variable X with probability density $\varphi(x)$ is the following definite integral $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$.

–Variance:

The variance of a continuous random variable X is the mathematical expectation of the square of its deviation from the mean value.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\varphi(x)dx,$$

However, it is often more convenient to calculate it by the formula

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx-[M(X)]^2 .$$

– Standard deviation:

The standard deviation of a continuous random variable is the square root of the variance

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}$$

If $Z=f(X)$ is a function of a random argument X, which has a probability density $\varphi(x)$, then its mathematical expectation and variance are determined by the following formulas:

$$M(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx$$

$$D(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\varphi(x)dx-[M(Z)]^2$$

Example 6. A random variable X is specified by the probability density $\varphi(x)=(1/2)x-5$ in the interval $(10{,}12)$, outside this interval $\varphi(x)=0$. Determine the mathematical expectation, variance, and standard deviation of a random variable X.

Solution: Mathematical expectation:

$$M(X)=\int_{10}^{12}x((1/2)x-5)dx=11{,}33333333;$$

Variance:

$$D(X)=\int_{10}^{12}x^2((1/2)x-5)dx-[M(X)]^2=0.5\int_{10}^{12}x^2dx-5\int_{10}^{12}x^2dx-[\int_{10}^{12}x((1/2)x-5)dx]^2=$$
$$=0{,}2222226.$$

Standard deviation:

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}2222226}\approx 0{,}471.$$

Example 7. We are given the probability density of a continuous random variable X:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & npu \quad x\le 0,\\ A\sin x & npu \quad 0<x\le\pi,\\ 0 & npu \quad x>\pi \end{cases}$$

Find the integral function $F(x)$ having previously calculated the value of the parameter A.

Solution: Since all values of a random variable X belong to the interval $]10,\pi[$. then $\int_0^{\pi} A\sin x dx = 1 \Rightarrow A = 1/2$.

The integral function is defined as follows:

When $x \le 0$, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

When $0 < x \le \pi$, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x (1/2)\sin x dx = (1/2)(1-\cos x)$;

When $x > \pi$, $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x (1/2)\sin x dx + \int_{\pi}^{x} 0dx = 1$.

Therefore:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & npu \quad x\le 0,\\ (1/2)(1-\cos x) & npu \quad 0<x\le\pi,\\ 0 & npu \quad x>\pi \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ
APPENDIX to the text

Значение функций Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$.

The values of the Gaussian $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ and Laplace $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ functions.

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$)
0,0	0,3989	0,0000	1,55	0,1200	0,4394
0,05	0,3984	0,0199	1,60	0,1109	0,4452
0,10	0,3970	0,0398	1,65	0,1023	0,4505
0,15	0,3945	0,0596	1,70	0,0940	0,4554
0,20	0,3910	0,0793	1,75	0,0863	0,4599
0,25	0,3867	0,0987	1,80	0,0790	0,4641
0,30	0,3814	0,1179	1,85	0,0721	0,4678
0,35	0,3752	0,1368	1,90	0,0656	0,4713
0,40	0,3683	0,1554	1,95	0,0596	0,4744
0,45	0,3605	0,1736	2,00	0,0540	0,4772
0,50	0,3521	0,1915	2,10	0,0440	0,4821
0,55	0,3429	0,2088	2,20	0,0355	0,4861
0,60	0,3332	0,2257	2,30	0,0283	0,4893
0,65	0,3230	0,2422	2,40	0,0224	0,4918
0,70	0,3123	0,2580	2,50	0,0175	0,4938
0,75	0,3011	0,2734	2,60	0,0136	0,4953
0,80	0,2897	0,2881	2,70	0,0104	0,4965
0,85	0,2780	0,3023	2,80	0,0079	0,4974

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$)
0,90	0,2661	0,3159	2,90	0,0060	0,4981
0,95	0,2541	0,3289	3,00	0,00443	0,49865
1,00	0,2420	0,3413	3,10	0,00327	0,49903
1,05	0,2299	0,3531	3,20	0,00238	0,49931
1,10	0,2179	0,3643	3,30	0,00172	0,49952
1,15	0,2059	0,3749	3,40	0,00123	0,49966
1,20	0,1942	0,3849	3,50	0,00087	0,49977
1,25	0,1826	0,3944	3,60	0,00061	0,49984
1,30	0,1714	0,4032	3,70	0,00042	0,49989
1,35	0,1604	0,4115	3,80	0,00029	0,49993
1,40	0,1497	0,4192	3,90	0,00020	0,49995
1,45	0,1394	0,4265	4,00	0,0001338	0,499968
1,50	0,1295	0,4332	4,50	0,0000160	0,499997
			5,00	0,0000015	0,49999997

.

.

Информационное обеспечение обучения
(Information support of training)

Основная литература:
(Main literature):

1. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 539 с. https://www.biblio-online.ru/book/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-431167 https://edu-lib.com/izbrannoe/kremer-n-sh-teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-onlayn
2. *Гмурман, В. Е.*Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата /— 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 404 с. https://www.biblio-online.ru/book/F6DC17CF-66E8-400F-9CDA-8067F86D996A http://padabum.com/d.php?id=10680
3. *Tobodga M.* Lecture on Probability Theory and Mathematical Statistics//—2-nd Edition — New York, USA, 2012 , — 657 Pages. https://www.pdfdrive.com/lectures-on-probability-theory-and-mathematical-statistics-e188437236.html
4. *Suhov Y.,Kelbert M.* Probability and Statistics by Example: 1. Basic Probability and Statistics/—2-nd Edition — Cambridge University Press, 2014, — 476 Pages. https://www.pdfdrive.com/probability-and-statistics-by-example-volume-1-basic-probability-and-statistics-e166589935.html

Дополнительная литература:
(Additional literature):

1. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 480 с. https://www.biblio-online.ru/book/F6DC17CF-66E8-400F-9CDA-8067F86D996A https://alleng.org/d/math/math321.htm
2. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер — М. : Издательство

Юрайт, 2018. — 272 с. https://www.biblio-online.ru/book/F6DC17CF-66E8-400F-9CDA-8067F86D996A

3. *Soong T.T.* Fundamentals of Probability and Statistics for engineers/— New York, USA, 2004 , — 408 Pages. https://www.pdfdrive.com/fundamentals-of-probability-and-statistics-for-engineers-e6851455.html
4. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный — М. : Издательство АЙРИС пресс, 2015 — 288 с. http://padabum.com/d.php?id=22233
5. *Семенов В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Семенов — М., С.-Петербург, Н.-Новгород, Воронеж, Ростов-на-Дону, Екатеринбург, Самара, Новосибирск, Киев, Харьков, Минск, : Издательство ПИТЕР, 2013 — 192 с. https://www.razym.ru/naukaobraz/disciplini/matem/302650-semenov-va-teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika.html
6. *Rohatgi V.K.,, A.K. Md. Ehsanes Saleh A.K An Introduction to Probability and Statistics*/—2-nd Edition — New York, USA, 1976 , — 747 Pages. https://www.pdfdrive.com/an-introduction-to-probability-and-statistics-wiley-series-in-probability-and-statistics-e168585572.html

Литература, из которой брался материал используемый при подготовке лекционного курса:

(Literature from which the material used in the preparation of the lecture course was taken):

[1]. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 480 с. https://www.biblio-online.ru/book/F6DC17CF-66E8-400F-9CDA-8067F86D996A https://alleng.org/d/math/math321.htm

[2]. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер — М. : Издательство Юрайт,

2018. — 272 с. https://www.biblio-online.ru/book/F6DC17CF-66E8-400F-9CDA-8067F86D996A

[3]. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный — М. : Издательство АЙРИС пресс, 2015 — 288 с. http://padabum.com/d.php?id=22233

[4]. *Халафян А. А., Боровиков В. П., Калайдина Г. В.* Теория вероятностей, математическая статистика и анализ данных. Основы теории и практика на компьютере. / А. А. Халафян и др. . — М. URSS, 2017 — 320 с. https://geminibook.xyz/books/teoriya-veroyatnostey-matemati

[5]. *Семенов В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Семенов — М., С.-Петербург, Н.-Новгород, Воронеж, Ростов-на-Дону, Екатеринбург, Самара, Новосибирск, Киев, Харьков, Минск, : Издательство ПИТЕР, 2013 — 192 с. https://www.razym.ru/naukaobraz/disciplini/matem/302650-semenov-va-teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika.html

[6]. *Suhov Y.,Kelbert M.* Probability and Statistics by Example: 1. Basic Probability and Statistics/—2-nd Edition — Cambridge University Press, 2014, — 476 Pages.

https://www.pdfdrive.com/probability-and-statistics-by-example-volume-1-basic-probability-and-statistics-e166589935.html

[7]. *Tobodga M.* Lecture on Probability Theory and Mathematical Statistics//—2-nd Edition — New York, USA, 2012 , — 657 Pages. https://www.pdfdrive.com/lectures-on-probability-theory-and-mathematical-statistics-e188437236.html

[8]. *Suhov Y.,Kelbert M.* Probability and Statistics by Example: 1. Basic Probability and Statistics/—2-nd Edition — Cambridge University Press, 2014, — 476 Pages. https://www.pdfdrive.com/probability-and-statistics-by-example-volume-1-basic-probability-and-statistics-e166589935.html

[9]. *Виленкин Н. Я., Потапов В. Г.* Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики / Виленкин Н. Я., Потапов В. Г. . — М. Издательство ПРОСВЕЩЕНИЕ, 1979 — 112 с. http://padabum.com/d.php?id=29021

[3]. *Емельянов Г. В., Скитович В. П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Емельянов Г. В., Скитович В. П. — Ленинград, Издательство ленинградского университета, 1967 — 333 с. http://mexalib.com/view/33788

[5]. *Лунгу К. Н. и др. Сборник задач по высшей математике с контроль-ными работами* / К. Н. Лунгу и др. — М. : Издательство АЙРИС пресс, 2017 — 592 с. https://www.razym.ru/naukaobraz/obrazov/53551-sbornik-zadach-po-vysshej-matematike-2-kurs.html

[6]. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: Учебное пособие / Под общей ред. А.А.Свешникова, 4-е изд., - СПб.; Изд. «Лань», 2008. — 448 с. http://en.bookfi.net/book/1501516

[8] *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.,* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: Учебное пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат лит., 1968. 1968. — 328 с. http://mexalib.com/download/10676

Андрей Борисович Колпаков

Анна Сергеевна Рукомина

Краткий курс лекций по дисциплине
«*Теория вероятностей и Математическая статистика*»
Часть 1. Теория вероятностей.
(*Short course of lectures on the discipline "Probability theory and Mathematical statistics"* Part 1. Probability theory**)**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.