

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.В. Жидков
А.К. Любимов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по специальности 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, по направлениям 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.01 Математика, 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Нижний Новгород
2021

УДК 532.51
ББК 22.253
Ж69

Ж69 Жидков А.В., Любимов А.К. ВЬЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 42 с.

Рецензент: д.т.н., профессор **А.А. Миронов**

В учебно-методическом пособии приводятся основные понятия и сведения о классификации и основных математических моделях жидкостей и газов. Содержание работы направлено на совершенствование профессиональной подготовки студентов института информационных технологий, математики и механики, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования в механике сплошных сред.

УДК 532.51
ББК 22.253

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

Содержание

Введение	4
Осреднённое описание движения и взаимодействия системы частиц	5
Общие уравнения механики сплошных сред	6
Уравнение неразрывности	6
Уравнение движения	6
Симметричность тензора напряжений Коши	7
Уравнение энергии	7
Уравнение энтропии	7
Дивергентная (консервативная) форма дифференциальных уравнений МСС	7
Модели простейших жидкостей и газов	8
Идеальные жидкости и газы	9
Идеальная несжимаемая однородная и неоднородная жидкости	10
Идеальная баротропная жидкость	11
Идеальный разреженный или совершенный газ	12
Классические (ньютоновские) вязкие жидкости и газы	16
Классическая вязкая несжимаемая жидкость	17
Классическая вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость	18
Классическая вязкая баротропная жидкость	18
Классический вязкий разреженный газ	19
Неклассические (неньютоновские) вязкие жидкости	19
Нелинейно-вязкие стабильные жидкости	20
Моделирование турбулентного потока	21
Модели турбулентности κ - ϵ	29
Стандартная κ - ϵ модель (<i>Standard</i>)	30
Ренормализационная κ - ϵ модель (<i>RNG</i>)	32
Реализованная κ - ϵ модель (<i>Realizable</i>)	33
Пример двумерной модели	35
Список литературы	38
Приложение. Формулы вычисления интенсивностей	40

Введение

Современная **Механика** представляет собой обширную физико-математическую дисциплину, занимающую прочное место в фундаменте системы знаний о материальных телах.

Механика имеет своей основной целью предсказание хода явления путём анализа его математической *или (и) натурной* модели и применения подходящего расчётного *и (или) экспериментального* метода. Богатство **Механики** заключено в большом количестве различных математических моделей, в разнообразии применяемых и разрабатываемых математических методов, в многочисленных до конца решённых задачах и в не менее многочисленных открытых проблемах, в ценности её выводов для практических приложений.

Исторически становление **Механики** послужило не только пониманию и описанию общей структуры происходящих физических процессов. **Она** оказала также заметное влияние на развитие **Математики**, главным образом в её части, связанной с теорией дифференциальных уравнений. **Она** вдохнула жизнь в целые **математические** направления **Она** стимулировала развитие **математических** теорий и методов **Она** обогатила **Математику** рядом важных понятий

В современной **Механике** принципиальной особенностью, создающей значительные трудности для теоретического исследования, является нелинейность процессов, проявляющаяся в весьма разнообразных и иногда неожиданных формах. Отсюда и идёт многообразие методов анализа и конкретных закономерностей, которые не укладываются в какую-либо одну стандартную схему. Особо остро в **Механике** стоят проблемы адекватности модели явлению. Для большинства практически важных механических задач до сих пор нет теорем существования, единственности и устойчивости решения. Поэтому и численные методы, получившие теперь с развитием суперкомпьютеров новые возможности их применения, во многих конкретных случаях оказываются не обеспеченными надлежащим обоснованием и часто связаны с затратой больших усилий и средств при их разработке и реализации.

Всё это вместе – многообразие явлений, фактов, методов, трудностей – привело к тому, что в **Механике** сложился целый ряд самостоятельных направлений со своими школами, литературой и преемственностью. Несомненно, что это обстоятельство накладывает определённый отпечаток и на преподавание **Механики** в различных университетах. Здесь явно ощущается отсутствие достаточно простых и вместе с тем единых учебных пособий (по разделам механики), опираясь на которые можно было бы развивать и надстраивать дальнейшие этажи стройного здания **Механики** [1]¹.

«Использован *естественный* для МСС язык «прямого» тензорного исчисления без ссылок на компонентные представления, *затрудняющие* восприятие основных понятий и действий над ними. Возвращение к компонентным записям, часто неизбежным в частных задачах, *не может затруднить* усвоившего этот язык читателя; *требуются лишь* навыки в элементарных алгебраических преобразованиях» [2].

¹ Конечно, в оригинале [1] речь идёт о «Газовой Динамике», здесь заменённой на «Механику». *Курсив добавлен Авторами.*

Осреднённое описание движения и взаимодействия системы частиц

Физические тела, изучаемые в механике, представляют собой системы большого числа частиц, взаимодействующих между собой, окружающими телами и полями.

Движение системы большого числа взаимодействующих частиц может представлять движение тела в различных агрегатных состояниях. Так, газы представляют собой системы удалённых друг от друга частиц, совершающих хаотические движения и взаимодействующих лишь при соударениях, т.е. при сближениях на расстояния порядка диаметра частиц. При охлаждении системы, т.е. уменьшении кинетической энергии хаотического движения, в результате соударения частиц с малой энергией происходит объединение частиц, и система становится жидкостью. При дальнейшем охлаждении система переходит в твёрдое тело, частицы которого совершают небольшие колебания около положения устойчивого равновесия.

Основной задачей механики является изучение характеристик движения материального тела и его взаимодействия с другими физическими телами как единого целого.

Математическое описание этого движения и взаимодействия как движения всех частиц неприемлемо не только из-за большого их числа, но и ввиду отсутствия точных начальных данных. Поэтому в механике сплошных сред используется осреднённое описание движения и взаимодействия, основанное на двух основных подходах – статистическом и феноменологическом².

Первый подход (статистический) основан на статистическом (вероятностном) описании поведения совокупности частиц (атомов, молекул, зёрен, ...). Для построения модели движения в этом случае вводятся некоторые гипотезы о свойствах частиц и их взаимодействии между собой и применяются методы теории вероятностей и математической статистики для получения средних характеристик и разрешающих соотношений по достаточно большому ансамблю частиц. Однако использование статистических методов может быть затруднено сложным строением вещества, недостатком информации о взаимодействии частиц, и, как следствие, чрезмерной сложностью получаемых уравнений.

Второй подход (феноменологический) основан на гипотезах и закономерностях, полученных из наблюдений рассматриваемого явления, специально проведенных экспериментов и опыта исследователя. Эти гипотезы и закономерности используются для построения последующих уравнений и выводов. Основу феноменологического подхода в механике сплошных тел и сред составляет абстрагирование от их реального атомно-молекулярного строения и переход к идеализированному представлению вещества в виде материального континуума – модели сплошной среды, заполняющей некоторую область про-

² От др.-греч. *φαινόμενον* – «являющееся» (лат. *phaenomenon*), от *φαίνω* (др.-греч. глагол) – «являть, показывать». В античной философии термин «феномен» (греч. *φαινόμενα*) означает предмет опытного знания. В естественных науках «феномен» – наблюдаемое явление или событие.

странства непрерывным образом, и осреднёнными характеристиками, непрерывно распределёнными по занимаемому телом объёму. Феноменологический подход отождествляет любой достаточно малый, но содержащий достаточно большое число частиц, физический объём с «материальной точкой», постулируя, что при стягивании к точке (стремлении к нулю) этого объёма введённые средние величины имеют конечный предел и тем самым порождают сплошные распределения (поля) этих величин [1]. Получаемые математические модели полей физических величин и являются предметом изучения в механике сплошных сред. Такая идеализация реального дискретного вещества позволяет использовать при исследовании движения тел хорошо разработанный аппарат непрерывных функций – дифференциальное и интегральное исчисление. Хотя в основу построения моделей механики сплошных сред положен аксиоматический подход, но не в таком законченном виде, как в математике [3]. Дело в том, что одним из элементов таких построений является эксперимент, который необходим не только для проверки адекватности модели, но и является решающим в установлении физических закономерностей (уравнений состояния, определяющих уравнений) поведения материала [4].

Общие уравнения механики сплошных сред

Закон баланса массы

⇒ Уравнение неразрывности (*continuity equation*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1)$$

Это одно скалярное уравнение, содержащее 4 неизвестных функции: плотность ρ – 1 скалярная величина, вектор скорости \mathbf{v} – 3 координаты.

Закон баланса импульса (количества движения)

⇒ Уравнение движения (*momentum equation*)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0. \quad (2)$$

Это векторное (тензорное) уравнение содержит в себе 3 скалярных уравнения. При этом неизвестных функций, входящих в это уравнение, в общем случае, – 13. Плотность ρ – 1 скалярная величина, вектор скорости \mathbf{v} – 3, тензор напряжений \mathbf{T}_σ – 9 функций (координат). Здесь \mathbf{F} – известный (заданный) вектор внешних массовых сил; $\frac{d(*)}{dt}$ – материальная (субстанциональная, пространственная) производная по времени

$$\frac{d(*)}{dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(*). \quad (3)$$

Закон баланса момента импульса

⇒ **Симметричность тензора напряжений Коши**
(*equation of angular momentum*)

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma^T. \quad (4)$$

Тензор напряжений \mathbf{T}_σ – остаётся 6 независимых функций (координат).

Закон баланса энергии (первый закон термодинамики)

⇒ **Уравнение энергии** (*energy equation*)

$$\rho \frac{du}{dt} - \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho q = 0. \quad (5)$$

где u – удельная внутренняя энергия;

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (6)$$

– тензор деформации скорости;

q – подвод энергии (например, тепловой) в единицу времени в единицу массы сплошной среды (массовый источник энергии);

\mathbf{h} – вектор потока энергии (тепловой).

Диссипативное неравенство (второй закон термодинамики)

⇒ **Уравнение энтропии** (*entropy equation*)

$$\rho \frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) - \rho \frac{q}{T} - \omega^* = 0, \quad \omega^* \geq 0, \quad (7)$$

где T – абсолютная температура; η – удельная энтропия; ω^* – функция диссипации.

Дивергентная (консервативная) форма дифференциальных уравнений МСС

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{T}_\sigma) - \rho \mathbf{F} = 0. \quad (9)$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e \mathbf{E} - \mathbf{T}_\sigma) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h}] - \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q) = 0. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{E} – единичный (метрический) тензор;

e – удельная полная энергия.

Удельная полная энергия равна сумме удельной внутренней энергии и удельной кинетической энергии

$$e = u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}. \quad (11)$$

Она может быть представлена через удельную энтальпию ι ³

$$e = \iota - \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}, \quad (12)$$

т.е. удельная энтальпия и удельная внутренняя энергия связаны соотношением:

$$\iota = u + \frac{p}{\rho}. \quad (13)$$

Уравнение энтропии

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho\eta\mathbf{v} + \frac{\mathbf{h}}{T} \right) - \rho \frac{q}{T} - \omega^* = 0. \quad (14)$$

Модели простейших жидкостей и газов

Жидкостями в механике сплошной среды называются тела, сопротивление которых сдвигу при любой деформации стремится к нулю, если скорости деформации равны нулю в течение достаточно большого промежутка времени ($t \rightarrow \infty$). [5].

Напряженное состояние малой частицы любой среды в любой момент времени t характеризуется тензором напряжений \mathbf{T}_σ , который в главных осях напряжений всегда имеет диагональную матрицу $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Экстремальные касательные напряжения, действующие в этой частице в момент t по плоскостям, делящим пополам углы между плоскостями главных напряжений, равны

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (15)$$

По определению рассматриваемая частица будет частицей жидкости, если при постоянной деформации ($\boldsymbol{\varepsilon} = \text{const}$), скорости деформации равной нулю ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$) и $t \rightarrow \infty$, $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} \rightarrow 0$, т.е. при $t \rightarrow \infty$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \rightarrow -p_\infty$.

³ **Энтальпия** (греч. ενθαλπη «напряжение»), также **тепловая функция** и **теплосодержание** – термодинамический потенциал. Энтальпия – это та энергия, которая доступна для преобразования в теплоту при определённом постоянном давлении. Энтальпия представляет собой сумму внутренней энергии тела и работы, которую необходимо затратить, чтобы тело объёмом $1/\rho$ ввести в окружающую среду, имеющую давление p и находящуюся с телом в равновесном состоянии. Изменение энтальпии – это тепло, подведённое к системе в изобарическом процессе (при постоянном давлении): $di = Td\eta + dp/\rho$. Энтальпией системы удобно пользоваться в тех случаях, когда в качестве независимых переменных, определяющих состояние системы, выбирают давление p и температуру T . В этом случае изменение энтальпии в изобарическом процессе практически удобно рассчитывать, зная теплоёмкость при постоянном давлении (термохимический закон Кирхгофа):

$$\Delta i \Big|_{p=\text{const}}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2} = \int_{T_1}^{T_2} C_p(T) dT.$$

Энтальпия – величина аддитивная (*экстенсивная*), то есть для сложной системы равна сумме энтальпий её независимых частей.

С позиций термостатики жидкость – это среда, состояние которой может быть описано всего лишь двумя параметрами; выражения потенциалов в этом случае известны с большой точностью, что позволяет описывать совокупность термостатических свойств обычных жидкостей и газов. Интересен частный случай, когда среда – идеальный газ. В классической механике жидкостей дополнительные соотношения, необходимые для записи поведения среды, выводятся из принципов термодинамики необратимых процессов, т.е. на основании квадратичной диссипации [6].

К простейшими жидкостями и газами относятся так называемые **идеальные** и **классические (ньютоновские)** жидкости. Эти модели реальных сред обладают фундаментальными свойствами реальных жидкостей и газов, причем свойства, во многих случаях второстепенные, не учитываются. Опыт показывает, что поведение многих реальных жидкостей и газов в определенных условиях достаточно точно описывается уравнениями механики сплошной среды, построенными для указанных идеальных тел. Методическое значение моделей состоит еще и в том, что из сопоставления с опытом получается возможность изучения отклонений свойств реальных сред от свойств моделей и, значит, возможность уточнения теории.

Идеальные жидкости и газы

Жидкость называется идеальной, если в ней отсутствуют касательные напряжения и наблюдаются только нормальные напряжения. В реальных жидкостях касательные напряжения не равны нулю, но часто встречаются случаи, когда касательные напряжения малы по сравнению с нормальными. В таких условиях жидкости удобно представить как идеальные. [7].

Идеальная жидкость (газ) – это сплошная среда, в которой рассеивание энергии отсутствует ($\omega^* = 0$) и сдвиговые сопротивления которой при любой деформации и любой скорости деформации в любой момент времени равны нулю [5], т.е.

$$\forall t: \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p, \quad (16)$$

следовательно, *девиатор* напряжений равен нулю и тензор напряжений \mathbf{T}_σ – *шаровой*, т. е.

$$\mathbf{T}_\sigma = -p\mathbf{E}. \quad (17)$$

Вектор напряжений \mathbf{p}_n при этом на любой площадке с нормалью \mathbf{n} равен

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\sigma = \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{E}) = -p\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = -p\mathbf{n}, \quad (18)$$

т.е. он направлен по нормали к площадке и имеет величину $-p$. Следовательно, давление p по всем площадкам, в данный момент проходящим через данную точку среды, одинаково. Эта связь вектора напряжений и давления представляет собой *закон Паскаля*. Обычно предполагается, что $p \geq 0$, т.е. это всегда действительно давление. Однако реальные жидкости могут выдерживать и некоторые всесторонние растягивающие напряжения ($p < 0$), и в понятие идеальной жидкости часто не включается обязательное требование $p \geq 0$.

Идеальная жидкость – это предельный случай схематизации, отличающийся крайней простотой и весьма полезный как первое приближение реальных слабовязких сред. Но если говорить строго, идеальных жидкостей в природе не существует [6].

Векторное уравнение движения идеальной жидкости в дивергентной форме (9)

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + p\mathbf{E}) - \rho\mathbf{F} = 0, \quad (19)$$

или в форме

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \nabla p - \rho\mathbf{F} = 0, \quad (20)$$

или в форме, часто используемого в гидродинамике, **уравнения Громеки–Лэмба**⁴

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{F} = 0. \quad (21)$$

Каждое из векторных уравнений (19), (20), (21) как совокупность скалярных уравнений называется **динамическими уравнениями Эйлера** (1755).

К уравнениям Эйлера должно быть присоединено уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = 0, \quad (22)$$

Система (19), (22) – или (20), (22), или (21), (22) – есть система совместных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора скорости \boldsymbol{v} и скаляров p (давления) и ρ (плотности). Это незамкнутая система, так как для пяти функций $\{\rho, p, \boldsymbol{v}\}$, зависящих от координат и времени, она дает только четыре дифференциальных уравнения в частных производных.

Идеальная несжимаемая однородная и неоднородная жидкости – это идеальная жидкость, плотность каждой малой частицы которой во времени не изменяется. Если при $t = t_0$ плотность ρ_0 была постоянной (одинаковой для всех материальных частиц; такая среда называется **однородной**), то она такой останется и при $t > t_0$. Если при $t = t_0$ плотность $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{R})$ (в этом случае среда называется **неоднородной**; \mathbf{R} – радиус-вектор материальной частицы в момент времени t_0), то она останется такой же и при $t > t_0$, т.е. $\rho = \rho_0(\mathbf{R})$.

Уравнения движения Эйлера и условие несжимаемости имеют вид

⁴ Для преобразования уравнения движения используется векторное тождество Громеки–Лэмба

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2}\right) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}).$$

Приведенное векторное тождество было получено Эйлером в 1755 г. Сами уравнения в форме Громеки–Лэмба в явном виде встречаются ещё у Лагранжа в 1781 г.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \mathbf{F} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

причем представляют собой замкнутую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для четырех функций координат и времени: p и \mathbf{v} .

Идеальная баротропная жидкость⁵ – это идеальная сжимаемая жидкость (газ), давление p в которой – определенная функция только плотности ρ

$$p = p(\rho), \quad (24)$$

причём

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} > 0, \quad \frac{dc}{d\rho} \geq 0. \quad (25)$$

Величина $c = \sqrt{dp/d\rho}$ называется **скоростью звука**.

В качестве примера рассмотрим уравнением состояния Клапейрона⁶

$$p = R\rho T, \quad (26)$$

которое для **изотермических**⁷ процессов совпадает с (24) (при этом $p(\rho)$ есть

⁵ **Баротропность, баротропия** (из др.-греч. *βάρος* – тяжесть и *τροπός* – оборот, поворот, образ, характер) – в гидродинамике – такое свойство сплошной среды, при котором её плотность является функцией только давления. Сплошная среда, не являющаяся баротропной, называется «**бароклиной**». Бароклинность (от греческого *βάρος* – тяжесть и *κλίνω* – наклонять), распределение масс жидкости или газа, при котором их плотность является функцией не только давления, но и других параметров (например, в атмосфере в сухом воздухе – температуры, во влажном – ещё и влажности; в морской воде – температуры и солёности). При бароклинности в атмосфере или море изопикнические (равной плотности) или изостерические (равного удельного объёма) поверхности не совпадают с изобарическими (равного давления) поверхностями, а пересекаются с ними, образуя так называемые изобароизостерические трубки или соленоиды. Бароклинность играет существенную роль в возникновении, развитии и разрушении вихрей в атмосфере и море.

⁶ Гей-Люссак (1822) и Сади Карно (1824) были первыми, кто, объединив законы Бойля–Мариотта и Шарля–Дальтона–Гей-Люссака, получили уравнение состояния идеального газа. Однако, Гей-Люссак найденным им уравнением не пользовался, а с полученными Карно результатами знакомился не по его, ставшей библиографической редкостью, книге «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», а по изложению идей Карно в работе Бенуа Клапейрона «Мемуар о движущей силе огня», то и вывод термического уравнения состояния идеального газа приписали Клапейрону, а уравнение стали называть *уравнением Клапейрона*, хотя сам этот учёный никогда не претендовал на авторство обсуждаемого уравнения. Не вызывает, между тем, сомнения, что именно Клапейрон первый понял плодотворность применения уравнения состояния, существенно упрощавшего все связанные с газами расчёты. Само понятие «идеальный газ» было введено Клаузиусом. Следующий важный шаг в формулировке термического уравнения состояния идеального газа – переход от индивидуальной для каждого газа постоянной к универсальной газовой постоянной – сделал русский инженер И.Альмов (1865), работа которого, опубликованная в малоизвестном среди физиков и химиков издании, не обратила на себя внимание. Этот же результат был получен Менделеевым в 1874 году. Независимо от работ русских ученых Г.Цейнер (1866), К.Гульдберг (1867) и А.Горстман (1873) пришли к выводу, что произведение индивидуальной для каждого газа постоянной в уравнении Клапейрона на молекулярный вес газа должно быть постоянной для всех газов величиной. В отечественной литературе, изданной до конца 1940-х годов, термическое уравнение состояния идеального газа называли уравнением Клапейрона или уравнением Клапейрона для 1 моля. Фамилия Менделеева в названии уравнения состояния появилась после начала «борьбы с низкопоклонством перед Западом» и поиска «русских приоритетов». Тогда-то и стали в научной и учебной литературе использовать такие варианты названия, как уравнение Менделеева, уравнение Менделеева–Клапейрона и уравнение Клапейрона–Менделеева. (<https://ru.wikipedia.org>).

⁷ **Изотермический процесс** (от др.-греч. *ἴσος* «равный» и *θέρμη* «жар») – термодинамический процесс, происходящий в физической системе при постоянной температуре.

однородная линейная функция), а для **адиабатических**⁸ – приводится к виду (24) (при этом $p(\rho)$ – степенная функция с показателем $\gamma > 1$), так что в обоих случаях [5]

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \gamma \geq 1. \quad (27)$$

Введение функции давления

$$p(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{c^2 d\rho}{\rho}, \quad (28)$$

также позволяет получить замкнутую систему уравнений для \mathbf{v} и ρ

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p(\rho) - \mathbf{F} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Для **слабо сжимаемых жидкостей при небольших давлениях** скорость звука c в ряде случаев может считаться постоянной. При этом из (28) $p = c^2 \rho_0 \ln \rho$; уравнение неразрывности и динамические уравнения будут содержать только функции \mathbf{v} и p , причем первое из них может быть приведено к виду

$$\frac{1}{c^2 \rho_0} \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (30)$$

Отбрасывая квадратичные члены \mathbf{v}^2 , $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ в первом уравнении системы (29) и $\mathbf{v} \cdot \nabla p$ в (30), получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \mathbf{F} = 0, \\ \frac{1}{c^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

приводимую к волновому уравнению с источником

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (32)$$

из которого и следует, что $c = \sqrt{dp/d\rho}$ есть скорость распространения слабых возмущений (скорость звука).

Идеальный разреженный или совершенный газ⁹ – это идеальная жидкость, подчиняющаяся уравнению состояния Клапейрона

⁸ **Адиабатический**, или **адиабатный процесс** (от др.-греч. *ἀδιάβατος* «непроходимый») – термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не обменивается теплотой с окружающим пространством.

⁹ **Идеальный газ** – абстрактная математическая модель газа, удобная для описания поведения реальных газов при не слишком больших давлениях и температурах. В отечественной литературе конца XIX – начала XX веков вместо названия «идеальный газ» использовали термин «совершенный газ». В отличие от термодинамики в гидроаэромеханике газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона, называют *совершенным*. У совершенного газа молярные изохорная C_V и изобарная C_p теплоемкости постоянны. В то же время *идеальным* в гидроаэро-

$$p = R\rho T, \quad (33)$$

$R = R_o/M = k_B/m$ – газовая постоянная ($R_o = k_B N_A$ – универсальная газовая постоянная¹⁰, k_B – постоянная Больцмана¹¹, N_A – число Авогадро¹², M – молярная масса, m – масса газа).

Внутренняя энергия единицы массы идеального газа прямо пропорциональна температуре¹³ [5, 6]

$$u = c_V T = \frac{c_V p}{R \rho}. \quad (34)$$

Многие инертные газы с достаточным приближением подчиняются уравнениям (33), (34). Например, такими свойствами обладает одноатомный газ при давлениях, не превышающих сотен атмосфер [5].

Уравнение Клапейрона (33) представляет собой соотношение между напряжениями, деформациями и температурой для рассматриваемого тела. Выражение внутренней энергии u (34) через два единственных для такой среды независимых параметра состояния p и T (u от ρ не зависит) получено опытным путём и методами статистической механики [5].

К неизвестным функциям ρ , \boldsymbol{v} , p , входящим в незамкнутую систему уравнений Эйлера (21) и (22), добавилась еще одна функция – температура T , связанная с ρ , p соотношением (33). Но теперь закон сохранения энергии дает возможность получить еще одно дифференциальное уравнение.

Запишем закон баланса энергии (5) в следующем виде

$$\rho \frac{du}{dt} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{D} + Q. \quad (35)$$

Так как тензор напряжений \mathbf{T}_σ шаровой (17), тензор деформации скорости \mathbf{D} определяется по формуле (6), то

$$\mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{D} = -p\mathbf{E} \cdot \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v}^T + \nabla \boldsymbol{v}) = -p\nabla \cdot \boldsymbol{v}.$$

Учитывая это, закон баланса энергии (35) запишется в виде

$$\rho \frac{du}{dt} = -p\nabla \cdot \boldsymbol{v} + Q. \quad (36)$$

или с учётом (34)

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = -p\nabla \cdot \boldsymbol{v} + Q.$$

Считаем, что скорость притока энергии Q связана только с теплопроводностью среды (причём объёмные источники тепла отсутствуют), тогда

механике называют газ, у которого отсутствуют вязкость и теплопроводность. Модель совершенного газа широко применяют при исследовании течения газов. (<https://ru.wikipedia.org>).

¹⁰ $R_o = 8.3144598(48)[\text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}]$.

¹¹ $k_B = 1.38064852(79)[\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}]$.

¹² $N_A = 6.022140857(75) \cdot 10^{23}[\text{моль}^{-1}]$.

¹³ Согласно экспериментально установленному закону Джоуля (закону Гей-Люссака–Джоуля) внутренняя энергия идеального газа не зависит от давления или объёма газа; доказательство зависимости внутренней энергии идеального газа только от температуры можно найти в работе [17].

$$Q = -\nabla \cdot \mathbf{h}.$$

Вектор потока тепла \mathbf{h} для большинства сред связан с полем температуры T обобщённым законом Фурье

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T. \quad (37)$$

где \mathbf{K} – тензор теплопроводности, вообще говоря, известным образом зависящий от температуры T . Для изотропной среды тензор теплопроводности – шаровой, то есть $\mathbf{K} = k\mathbf{E}$. В этом случае k – коэффициент теплопроводности. Учитывая всё это, получим уравнение теплопроводности

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k \nabla T) + p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (38)$$

Теперь система уравнений (19), (22), (33), (38) для скалярных величин ρ , p , T и вектора \mathbf{v} стала замкнутой для рассматриваемого идеального газа. Вместо температуры T за искомую функцию можно принять внутреннюю энергию u или другую термодинамическую функцию, выражающуюся через ρ , p , T , например, энтальпию (теплосодержание)

$$i = c_p T, \quad c_p = c_V + R \quad (39)$$

или энтропию η .

Выясним физический смысл коэффициентов c_V и c_p .

Из уравнения неразрывности (22)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d \ln \rho}{dt}.$$

Учитывая это, закон баланса энергии (36) запишется в виде

$$\rho \frac{du}{dt} = p \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + Q.$$

или с учётом (34)

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = p \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + Q. \quad (40)$$

Отсюда следует, что c_V – коэффициент теплоёмкости при постоянном объеме ($\rho = const$).

Найдём логарифм левой и правой части равенства (33) и продифференцируем по времени, получим

$$\frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \ln \rho}{dt} + \frac{d \ln T}{dt}$$

или

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}.$$

Подставляем в (40) и учитываем соотношение (33), получим

$$\rho(c_V + R) \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + Q.$$

или по (39)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + Q. \quad (41)$$

то есть c_p – **коэффициент теплоёмкости** при постоянном давлении ($p = const$).

Получаем **формулу Майера**

$$c_p - c_V = R, \quad (42)$$

которая может быть представлена в виде

$$R = c_p - c_V = c_V \left(\frac{c_p}{c_V} - 1 \right) = c_V (\gamma - 1), \quad (43)$$

где $\gamma = c_p/c_V$ – **число Пуассона** или **показатель адиабаты**.

Покажем, что энтропия совершенного газа является функцией ρ, p, T .

Из первого закона термодинамики, представленного в этом случае в форме (40), и второго закона термодинамики, который при отсутствии диссипации энергии представляется в виде

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} = Q. \quad (44)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\rho c_V}{\rho T} \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho T} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{c_V}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \\ &= c_V \frac{d \ln T}{dt} - c_V (\gamma - 1) \frac{d \ln \rho}{dt} = c_V \left(\frac{d \ln T}{dt} - \frac{d \ln \rho^{\gamma-1}}{dt} \right) = \\ &= c_V \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} \right). \end{aligned}$$

Откуда определяется энтропия

$$\eta = c_V \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + const, \quad (45)$$

или, используя соотношение (33),

$$\begin{aligned} \eta &= c_V \ln \frac{p}{R \rho^{\gamma-1}} + const = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + c_V \ln \frac{1}{R} + const = \\ &= c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + const^*. \end{aligned} \quad (46)$$

Если при **значительных скоростях движения газа пренебречь теплопроводностью** (считая процесс деформации частицы **адиабатическим**), то в уравнении баланса энтропии (44), кроме $\omega^* = 0$, надо положить и $Q = 0$, и значит, энтропия частицы будет постоянной во времени (но может быть различной у разных частиц). Из (46) при $\eta = const$ получаем

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

т.е. возвращаемся к задаче о баротропной жидкости.

Если энтропия η имеет различные постоянные значения для различных физических частиц, то для **таких адиабатических процессов** система уравнений Эйлера вместе с условием баланса массы замыкается соотношением (46) и условием

$$\frac{d\eta}{dt} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \eta = 0. \quad (47)$$

Классические (ньютоновские) вязкие жидкости и газы

Вязкой называют жидкость, в которой при движении кроме нормальных напряжений наблюдаются и касательные напряжения [7].

Классическая вязкая жидкость – это изотропная жидкость (вообще говоря, сжимаемая), сдвиговое сопротивление которой отлично от нуля и линейно зависит от скорости деформации сдвига; термодинамическими параметрами состояния являются плотность ρ и температура T . [5].

Таким образом, в вязкой жидкости тензор напряжений \mathbf{T}_σ есть линейная функция тензора деформации скорости \mathbf{D} (6). Общее соотношение между напряжениями и скоростями деформаций имеет вид

$$\mathbf{T}_\sigma = (-p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v}) \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (48)$$

где λ, μ – коэффициенты вязкости, которые для классических вязких жидкостей не зависят от деформаций и скоростей. Поэтому их называют «постоянными», хотя они могут зависеть от температуры. Коэффициент μ получил название – **коэффициент динамической вязкости** (см. ниже), коэффициент λ – **второй коэффициент вязкости**.

Для тензора напряжений вида (48) среднее напряжение

$$\sigma = \frac{1}{3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}_\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \quad (49)$$

есть линейная неоднородная функция скорости деформации объёма ($\nabla \cdot \boldsymbol{v}$). Соотношение (49) означает, что закон вязкости объёмного сопротивления является линейным, поэтому $\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ есть **коэффициент объёмной вязкости**.

Обычно коэффициент объёмной вязкости считается пренебрежимо малым, за исключением тех случаев, когда изучается структура ударных волн, а также поглощение и затухание акустических (звуковых) волн [8]. При $\tilde{\lambda} = 0$ второй коэффициент вязкости будет равным:

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu, \quad (50)$$

а тензор напряжений можно представить как

$$\mathbf{T}_\sigma = -p \mathbf{E} + 2\mu \left[\mathbf{D} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \mathbf{E} \right] \quad (51)$$

или

$$\mathbf{T}_\sigma = -p\mathbf{E} + 2\mu\text{dev}\mathbf{D}. \quad (52)$$

Из соотношения (48), как и из соотношения (52), следует, что девиаторы напряжений и скоростей деформаций связаны соотношением

$$\text{dev}\mathbf{T}_\sigma = 2\mu\text{dev}\mathbf{D}, \quad (53)$$

которое означает линейный закон вязкости сдвигового сопротивления, и поэтому μ есть **коэффициент сдвиговой вязкости** или **коэффициент динамической вязкости** или просто **динамическая вязкость**.

Вязкость не очень разреженных газов практически не зависит от давления. Такой же вывод справедлив и для других кинетических коэффициентов для газов, например, для коэффициента теплопроводности. С повышением температуры вязкость большинства газов увеличивается, у жидкостей вязкость уменьшается при увеличении температуры. Динамическая вязкость жидкостей уменьшается с увеличением температуры, и растёт с увеличением давления.

Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости получаются из уравнений движения

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{T}_\sigma = 0 \quad (54)$$

подстановкой \mathbf{T}_σ из соотношений (48)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{F} - \nabla \cdot [(-p + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + \mu(\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v})] = 0. \quad (55)$$

Если в области течения λ и μ можно считать постоянными (однородная жидкость), то отсюда получаются **уравнения Навье–Стокса**¹⁴:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{F} + \nabla p - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu\Delta\mathbf{v} = 0, \quad (56)$$

где в последнем слагаемом $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа.

Уравнение сохранения массы

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

вместе с уравнениями Навье–Стокса представляют **незамкнутую** систему четырёх дифференциальных уравнений для пяти функций ρ , p , \mathbf{v} .

Классическая вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения Навье–Стокса и условие несжимаемости (при $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta\mathbf{v} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (57)$$

¹⁴ Впервые на основании соображений о взаимодействии молекул уравнения были получены Навье в 1822 г. и Пуассоном в 1829 г. Позднее, используя уравнения динамики сплошных сред (в напряжениях) и уравнение несжимаемости, эти уравнения получил Сен-Венан в 1843 г. и затем Стокс в 1845 г. [8].

представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений для p и \boldsymbol{v} . Здесь $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости (кинематическая вязкость).

Коэффициент вязкости μ газов почти не зависит от давления, а ν убывает обратно пропорционально давлению

Если $\mu = 0$, то уравнения Навье–Стокса переходят в уравнения Эйлера [7].

В отличие от уравнений Эйлера в уравнения Навье–Стокса входят производные второго порядка. Это должно отразиться на постановке граничных условий.

Для несжимаемой вязкой жидкости при $\mu = const$ задача отыскания поля скоростей и давлений может быть решена независимо от задачи отыскания поля температур. После того как функции p и \boldsymbol{v} будут найдены, можно искать температуру, решая уравнение энергии.

Классическая вязкая несжимаемая теплопроводная жидкость. Если вязкость несжимаемой жидкости зависит от температуры ($\rho = const, \mu = \mu(T)$), то уравнение движения имеют вид (из (55))

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \mathbf{F} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta\boldsymbol{v} - \frac{2}{\rho}\frac{d\mu}{dT}\nabla T \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (58)$$

Условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \quad (59)$$

Из уравнения энергии при законе теплопроводности Фурье и постоянной теплопроводности k получаем уравнение теплопроводности движущейся жидкости

$$\frac{dT}{dt} - a^2\Delta T - \frac{2\nu}{c_V}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho c_V}}. \quad (60)$$

Система уравнений (58)-(60) для пяти функций p , \boldsymbol{v} и T является замкнутой.

Классическая вязкая баротропная жидкость

Давление зависит только от плотности

$$p = p(\rho). \quad (61)$$

Уравнение Навье–Стокса

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \rho\mathbf{F} - \nabla \cdot [(-p(\rho) + \lambda\nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbf{E} + \mu(\nabla\boldsymbol{v}^T + \nabla\boldsymbol{v})] = 0, \quad (62)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad (63)$$

представляют собой замкнутую систему для функций ρ , \boldsymbol{v} .

Классический вязкий разреженный газ

Уравнение Навье–Стокса

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot [(-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} + \mu (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})] = 0, \quad (64)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (65)$$

уравнение состояния

$$p = p(\rho, T), \quad (66)$$

уравнение энергии

$$\rho \frac{du}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (k \nabla T) - \omega^* = 0, \quad (67)$$

где внутренняя энергия

$$u = u(\rho, T) \quad (68)$$

– известная функция, функция диссипации ω^* имеет вид

$$\omega^* = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}, \quad (69)$$

представляют собой замкнутую систему для функций ρ, p, \mathbf{v}, T .

Неклассические (неньютоновские) вязкие жидкости

К категории неньютоновских жидкостей относятся жидкости, **кривая текучести** которых не является линейной, т.е. вязкость неньютоновской жидкости не остаётся постоянной при заданных температуре и давлении, а зависит от других факторов, таких, как скорость деформации сдвига, предыстории движения жидкости, конструктивных особенностей сосудов, в которых находится жидкость. [9].

Реальные жидкости с нелинейной кривой течения можно разбить на три обширные группы:

- Напряжения сдвига в каждой частице зависят только от скоростей сдвига в той же частице.
- Связь между напряжениями и скоростями сдвига зависит от времени действия напряжений или от предыстории движения жидкости.
- Вязкоупругие жидкости, частично проявляющие упругое восстановление формы после снятия напряжения.

Жидкости первого типа, свойства которых не зависят от времени, удобно подразделить на три подгруппы в зависимости от вида кривой текучести (Рисунок 1):

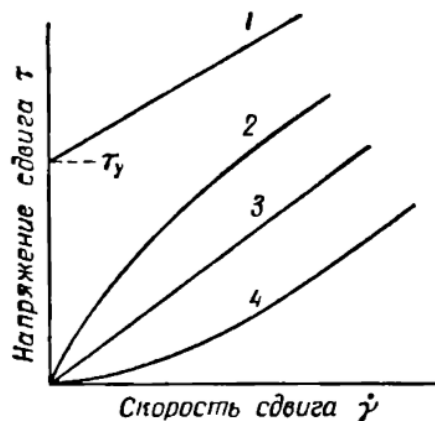


Рисунок 1. Виды кривой текучести [9]

- бингамовские пластичные жидкости (бингамовские пластики) – кривая 1;
- псевдопластичные жидкости (псевдопластики) – кривая 2;
- дилатантные жидкости – кривая 4.

Для сравнения приведён график (кривая 3) линейной зависимости для ньютоновских жидкостей.

Жидкости второго типа, свойства которых зависят от времени, можно подразделить на две подгруппы в соответствии с тем, убывают или возрастают со временем напряжения сдвига, если жидкость деформируется с постоянной скоростью сдвига: 1) тиксотропные жидкости и 2) реопектические жидкости.

Нелинейно-вязкие стабильные жидкости в простейшем случае отличаются от классической жидкости тем, что коэффициенты вязкости зависят от тензора скорости деформации и температуры [5].

Для изотропной нелинейной вязкой несжимаемой жидкости, как и для классической, девиаторы напряжений и скорости деформаций пропорциональны:

$$\text{dev}\mathbf{T}_\sigma = 2\mu\text{dev}\mathbf{D} = 2\mu\mathbf{D}. \quad (70)$$

Через девиаторы определяются интенсивности напряжений и скоростей деформаций (формулы определяющие интенсивности приведены в приложении). Интенсивность нормальных напряжений (*normal stress intensity*)

$$\sigma_i = \sqrt{3J_2(\text{dev}\mathbf{T}_\sigma)} = \sqrt{\frac{3}{2}\text{dev}\mathbf{T}_\sigma \cdot \text{dev}\mathbf{T}_\sigma},$$

интенсивность скоростей деформаций (*strain rate intensity*)

$$d_i = \sqrt{\frac{4}{3}J_2(\text{dev}\mathbf{D})} = \sqrt{\frac{2}{3}\text{dev}\mathbf{D} \cdot \text{dev}\mathbf{D}}.$$

Из соотношения (70) получим

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i = 2\mu\sqrt{\frac{3}{2}}d_i$$

или

$$2\mu = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{d_i} \quad (71)$$

и, следовательно, соотношение между напряжениями и скоростями деформаций несжимаемой жидкости имеет вид

$$\mathbf{T}_\sigma = -p\mathbf{E} + \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{d_i}\mathbf{D}. \quad (72)$$

В классическом случае ньютоновской несжимаемой жидкости коэффициент μ при $T = \text{const}$ постоянен. В рассматриваемом случае коэффициент вязкости μ есть некоторая функция инвариантов d_i и $\sigma = -p$, однако такая, что $\sigma_i \rightarrow 0$ при $d_i \rightarrow 0$:

$$\sigma_i = \sigma_i(d_i, \sigma, T), \quad d_i \mu(d_i) \rightarrow 0 \text{ при } d_i \rightarrow 0. \quad (73)$$

Эта функция находится из опытов на сдвиг и обычно не зависит от σ , а только от d_i и T . Среднее напряжение σ , как и в других несжимаемых средах, находится в процессе решения краевой задачи.

Соотношение (70), справедливое как для классической, так и нелинейно-вязкой жидкости, можно трактовать как условие совпадения направлений тензоров $\text{dev}\mathbf{T}_\sigma$ и $\text{dev}\mathbf{D}$, и потому оно называется векторным свойством среды.

Соотношения (73) между инвариантами называются скалярными свойствами среды. Таким образом, векторные свойства классической и нелинейно-вязкой жидкости совпадают, скалярные свойства их различны.

Единственным независимым параметром состояния стабильных жидкостей считается температура, и поэтому закон сохранения энергии приводит к уравнению теплопроводности [5].

Уравнение движения (54) при подстановке в него выражения напряжений (72)

$$\rho \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \left(-p\mathbf{E} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{d_i} \mathbf{D} \right) = 0, \quad (74)$$

условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (75)$$

уравнение теплопроводности

$$\rho C \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k \nabla T) - \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{d_i} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (76)$$

образуют замкнутую систему для $\boldsymbol{\nu}$, p , T , если известна зависимость коэффициентов теплоёмкости и теплопроводности от температуры $C(T)$, $k(T)$; $\rho = \rho_0(\mathbf{R})$.

Моделирование турбулентного потока

Начало учения о турбулентности положил опыт О.Рейнольдса 1883 года [10].

Рейнольдс обнаружил, что переход течения от ламинарного (слоистого без перемешивания) режима к турбулентному (вихреобразному вращательному) наблюдается при некотором значении скорости движения жидкости, которую принято называть критической скоростью. Значение этой скорости зависит от соотношения гидродинамического размера потока, плотности среды и вязкости.

Обобщая данные опытов, Рейнольдс ввёл безразмерный критерий (параметр, число), названный впоследствии в его честь:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}. \quad (77)$$

Здесь ρ – плотность потока, v – характерная скорость потока, d – характерный гидродинамический размер потока, μ – коэффициент динамической вязкости.

Физический смысл критерия Рейнольдса заключается в том, что он представляет собой соотношение сил инерции и сил вязкости. Если силы инерции превышают на какой-то порядок (определяемый критическим числом Рейнольдса) силы вязкости, течение переходит к турбулентному режиму.

Всё дело в том, что, когда силы вязкости малы по отношению к силам инерции, течение теряет устойчивость. На самом деле хаотические случайные процессы происходят в жидкости постоянно, даже в условиях, когда она не движется или течёт в ламинарном режиме. Однако, когда силы вязкости достаточно высоки, любые флуктуации очень быстро угасают. Вязкость не даёт им развиваться. Напротив, когда вязкость мала, любое случайное возмущение не угасает, а наоборот может даже усиливаться. Так происходит вихреобразование, и течение становится турбулентным.

Рейнольдс показал, что для течения в трубе критические значения числа Рейнольдса лежат в диапазоне от 2300 до 20000. Есть экспериментальные исследования, которые показали, что критическое значение может быть ещё больше.

Критическое значение числа Рейнольдса зависит от большого числа факторов: от градиента давления, от перепада температур, от интенсивности турбулентности во внешнем потоке, от высоты бугорков шероховатости и т.д.

Вероятно, практически все эти факторы можно свести всего лишь к одному: возмущению скорости. И градиент давления, и неравномерность температур, и интенсивность турбулентности, и шероховатость, всё это может вызвать некоторое возмущение скорости. Если это возмущение невелико, оно может быть погашено вязкими силами, стремящимися выровнять поле скоростей. При больших возмущениях течение может потерять устойчивость, и возникает турбулентность.

Как уже отмечалось, турбулентное движение является нестационарным и ему присущ широкий спектр масштабов турбулентных вихрей – от наиболее крупных до самых мелких.

Турбулентное течение вполне может быть описано обычной нестационарной системой уравнений Навье-Стокса, поскольку при их выводе не налагалось никаких ограничений на соотношение между силами инерции и силами вязкости. Однако при численном решении этих уравнений для того, чтобы учесть эти масштабы, может потребоваться настолько мелкая сетка, что даже современные компьютерные мощности не позволят решить такую задачу. То же относится и к выбору шага численного интегрирования по времени, так как характерное время мелкомасштабной турбулентности очень мало. С другой стороны, именно мелкомасштабная турбулентность играет важнейшую роль при описании турбулентных течений.

Поэтому прямое численное моделирование (Direct Numeric Simulation – DNS) турбулентных течений применяется для инженерных расчётов достаточно редко.

Более простой моделью является так называемое моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES). В этом подходе крупные вихри рассчитываются, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale – SGS) моделируются. Основой такого подхода является то, наибольшие вихри несут максимум энергии и должны быть рассчитаны.

В настоящее время наиболее распространённым способом моделирования турбулентности является использование осреднения, когда вместо уравнений для мгновенных значений параметров используются уравнения для их осреднённых величин.

Для количественного описания развитого турбулентного движения Рейнольдс предложил (в 1894 г.) следующий, получивший широкое применение, приём. Наблюдая во времени параметры потока можно предположить, что значение каждого из них можно представить в виде суммы осреднённой (обозначается чертой сверху) и пульсационной (обозначается штрихом) составляющих. Например:

$$f = \bar{f} + f'. \quad (78)$$

То есть параметр f рассматривается как некоторая не меняющаяся (или меняющаяся по какому-то определённом закону) величину \bar{f} , к которой добавлены случайные пульсации f' . Таким образом, турбулентное течение рассматривается как некий случайный процесс с применением к нему приёмов, используемых в теории вероятностей и математической статистике [10].

Осреднение может проводиться различными способами: по ансамблю, по времени, по пространству.

В общем случае в процессе любого осреднения необходимо, чтобы выполнялись условия Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g}, \\ \bar{a} &= a, \\ \overline{\bar{f} g} &= \bar{f} \bar{g}, \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \end{aligned} \quad (79)$$

где $a = const$, а s – пространственная или временная координата.

Следствия из условий (79):

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f}, \\ \bar{f}' &= 0, \\ \overline{\bar{f} g'} &= 0, \\ \overline{a f} &= a \bar{f}, \\ \overline{f g} &= \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'}. \end{aligned} \quad (80)$$

Величину $\overline{f' g'}$ называют корреляцией пульсаций случайных величин f и g . В общем случае она не равна нулю.

Для несжимаемых течений используется процедура Рейнольдса осреднения по времени:

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} g(\tau) d\tau. \quad (81)$$

Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций. При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения *может быть* сколь угодно большим ($T = \infty$). В нестационарном случае период осреднения *должен быть* много меньше характерных времен изменения нестационарных величин. Однако не всегда возможно подобрать период T такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса. Как следствие, применение нестационарных уравнений Рейнольдса не всегда обосновано. Тем не менее, этот подход широко распространён.

Правила осреднения Рейнольдса можно применить и в случае сжимаемых течений, т.е. в случае, когда в процессе движения среды плотность изменяется. Однако, при использовании осреднения по Рейнольдсу для сжимаемых течений получается большое количество корреляций плотности и скорости. Поэтому для сжимаемых течений часто используется процедура осреднения по Фавру (предложена в 1969 г.), иногда называемая методом средневзвешенных (средне-массовых) параметров:

$$\tilde{g}(t) = \frac{\bar{\rho}g}{\bar{\rho}}. \quad (82)$$

В случае осреднения по Фавру корреляции плотности и скорости отсутствуют.

Мгновенные значения параметров в этом случае представляются в виде:

$$g = \tilde{g} + g'', \quad (83)$$

где g'' – пульсационная составляющая по Фавру, т.е. мгновенное отклонение параметра g от среднего по Фавру \tilde{g} .

Для средних по Фавру и соответствующих пульсаций справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{f} + g} &= \frac{\overline{\rho(f + g)}}{\bar{\rho}} = \tilde{f} + \tilde{g}, \\ \tilde{\tilde{a}} &= a, \\ \overline{\tilde{f}g} &= \frac{\overline{\rho f g}}{\bar{\rho}} = \overline{\rho f} \left(\frac{\overline{g}}{\bar{\rho}} \right) = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \bar{\rho} \left(\frac{\overline{g}}{\bar{\rho}} \right) = \tilde{f} \left(\bar{\rho} \frac{\overline{g}}{\bar{\rho}} \right) = \tilde{f} \tilde{g}, \\ \overline{f - f''} &= \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} = \frac{(\bar{\rho} + \rho')(\overline{f} + f')}{\bar{\rho}} = \\ &= \frac{(\bar{\rho} \overline{f} + \bar{\rho} f' + \rho' \overline{f} + \rho' f')}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho} \overline{f} + \rho' f'}{\bar{\rho}} = \overline{f} + \frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\overline{f''} = \overline{f - \tilde{f}} = \bar{f} - \overline{\tilde{f}} = \bar{f} - \left(\bar{f} + \frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \neq 0,$$

$$\overline{\rho f} = \bar{\rho} \overline{\tilde{f}} = \bar{\rho} \left(\bar{f} + \frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \right) = \bar{\rho} \bar{f} + \overline{\rho' f'},$$

$$\overline{\rho f''} = \overline{\rho(f - \tilde{f})} = \overline{\rho f} - \overline{\rho \tilde{f}} = \bar{\rho} \bar{f} - \bar{\rho} \bar{f} = 0,$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho f g} &= \overline{\rho(\tilde{f} + f'')(\tilde{g} + g'')} = \overline{\rho(\tilde{f} \tilde{g} + \tilde{f} g'' + f'' \tilde{g} + f'' g'')} = \\ &= \overline{\rho \tilde{f} \tilde{g}} + \overline{\rho \tilde{f} g''} + \overline{\rho f'' \tilde{g}} + \overline{\rho f'' g''} = \bar{\rho} \overline{\tilde{f} \tilde{g}} + \overline{\rho f'' g''} = \\ &= \bar{\rho} \overline{\tilde{f} \tilde{g}} + \overline{\rho f'' g''}. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений для течения сжимаемой теплопроводящей вязкой жидкости при отсутствии объёмной вязкости ($\tilde{\lambda} = 0$). Система состоит из уравнений неразрывности, движения и энергии.

Применим правила осреднения Рейнольдса и Фавра. *Плотность, давление, тепловой поток осредняются по Рейнольдсу, а скорость, энергия, энтропия, энтальпия, температура осредняются по Фавру.*

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (85)$$

Усредним его

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \overline{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}).$$

Таким образом, уравнение неразрывности для осреднённых величин имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (86)$$

Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_M) - \rho \mathbf{F} = 0, \quad (87)$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\tau}_M = \mu(T) \left[\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} \right] \quad (88)$$

– тензор вязких молекулярных напряжений

Применим к уравнению движения (87) процедуру усреднения

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_M) - \rho \mathbf{F}} &= \\ = \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} \mathbf{E} - \bar{\boldsymbol{\tau}}_M) - \bar{\rho} \bar{\mathbf{F}} &= \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} + \bar{p} \mathbf{E} - \overline{\boldsymbol{\tau}_M}) - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{F}}.$$

Уравнение движения для осреднённых величин имеет вид:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} + \bar{p} \mathbf{E} - \overline{\boldsymbol{\tau}_M}) - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{F}} = 0. \quad (89)$$

По форме записи уравнение (89) очень похоже на исходное уравнение (87), но в нём появилось дополнительное слагаемое $\bar{\rho} \widetilde{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''}$. По своему физическому смыслу тензор второго ранга

$$\overline{\boldsymbol{\tau}_T} \equiv -\bar{\rho} \widetilde{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} = -\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''} \quad (90)$$

представляет собой тензор турбулентных напряжений трения [11], его также называют тензором **рейнольдсовых напряжений** (Reynolds stress tensor). Этот симметричный тензор увеличивает количество неизвестных, входящих в уравнение движения и в общую систему, на шесть функций.

Уравнение энергии имеет вид¹⁵:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot \{[(\rho e + p)\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_M] \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h}\} - \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q) = 0, \quad (91)$$

где e – удельная полная энергия, \mathbf{h} – вектор потока тепла, который в соответствии с обобщённым законом Фурье (37), для изотропной сплошной среды определяется градиентом температуры

$$\mathbf{h} = -k \nabla T = -\frac{\mu c_p}{Pr} \nabla T, \quad (92)$$

где Pr – число Прандтля¹⁶.

Применим процедуру осреднения к уравнению энергии

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot \{[(\rho e + p)\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_M] \cdot \mathbf{v} + \mathbf{h}\} - \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q)} = \\ & = \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot \{[\overline{(\rho e + p)\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}_M}] \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{h}}\} - \overline{\rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + q)} = \\ & = \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{(\rho e + p)\mathbf{v}} - \overline{\boldsymbol{\tau}_M \cdot \mathbf{v}} + \bar{\mathbf{h}}] - \bar{\rho} (\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} + \tilde{q}). \end{aligned} \quad (93)$$

Выполним преобразования отдельных слагаемых. Для этого обозначим

$$\gamma \equiv e + \frac{p}{\rho}.$$

Тогда

¹⁵ В аналогичной форме используется уравнение энергии в системе ANSYS Fluent.

¹⁶ Представляет собой отношение скорости диффузии к теплопроводности и является критерием подобия температурных и скоростных полей:

$$Pr = \frac{\nu}{a^2} = \frac{\mu c_p}{k},$$

где $\nu = \mu/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости, μ – динамический коэффициент вязкости, ρ – плотность, $a^2 = k/(\rho c_p)$ – коэффициент теплопроводности, k – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоёмкость среды при постоянном давлении.

$$\overline{(\rho e + p)\mathbf{v}} = \overline{\rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v}} = \bar{\rho} \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho \gamma'' \mathbf{v}''}.$$

С одной стороны

$$\tilde{\gamma} = \overline{\left(e + \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{\overline{\rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right)}}{\bar{\rho}} = \frac{\overline{\rho e + p}}{\bar{\rho}} = \frac{\overline{\rho e} + \bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{p}}{\bar{\rho}} = \tilde{e} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}},$$

с другой стороны величина γ может быть выражена через удельную энтальпию ι следующим образом

$$\gamma \equiv e + \frac{p}{\rho} = u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + \frac{p}{\rho} = \iota + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2},$$

и её среднее по Фавру

$$\tilde{\gamma} = \left(\iota + \frac{\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}{2} \right) = \tilde{\iota} + \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}) = \tilde{\iota} + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + (\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})],$$

соответственно пульсационная составляющая

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \gamma - \tilde{\gamma} = \iota + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \left\{ \tilde{\iota} + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + (\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})] \right\} = \\ &= \iota'' + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'') \cdot (\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'') - \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + (\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})] = \\ &= \iota'' + \frac{1}{2} [2\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}'' + \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}'' - (\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})] = \\ &= \iota'' + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}'' + \frac{1}{2} [\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}'' - (\overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''})]. \end{aligned}$$

Подставим полученные соотношения в (93) окончательно для уравнения энергии получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot \{ [(\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{p})\mathbf{E} - \overline{\boldsymbol{\tau}}_M] \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{h}} \} - \bar{\rho} (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{q}) + \\ &+ \nabla \cdot \left[\bar{\rho} (\overline{\iota'' \mathbf{v}''}) + \bar{\rho} (\overline{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{\mathbf{v}'' \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}) - \overline{\boldsymbol{\tau}}_M \cdot \mathbf{v}'' \right] - \\ &\quad - \bar{\rho} (\overline{\mathbf{F}'' \cdot \mathbf{v}''}) = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

В этом уравнении появились дополнительные слагаемые. Кроме уже известного тензора рейнольдсовых напряжений (90), это ещё следующие корреляции¹⁷ пульсаций:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} (\overline{\iota'' \mathbf{v}''}) &= \overline{\rho \iota'' \mathbf{v}''}, \\ \frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{\mathbf{v}'' \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}) &= \frac{1}{2} \overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}, \\ \overline{\boldsymbol{\tau}}_M \cdot \mathbf{v}'' &, \\ \bar{\rho} (\overline{\mathbf{F}'' \cdot \mathbf{v}''}) &= \overline{\rho \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{v}''}. \end{aligned}$$

¹⁷ **Корреляция** (от лат. *correlatio* «соотношение, взаимосвязь») – статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин (либо величин, которые можно с некоторой допустимой степенью точности считать таковыми).

Чтобы вычислить эти слагаемые, требуются дополнительные уравнения. Эти уравнения обычно называют **моделью турбулентности**.

Обычно двумя последними корреляциями пренебрегают [11].

По физическому смыслу вектор

$$\overline{\mathbf{h}}_T \equiv \overline{\rho (\overline{\mathbf{v}''})} = \overline{\rho \mathbf{v}''} \quad (95)$$

представляет собой вектор дополнительного **турбулентного теплового потока** [11]. Аналогично этому вектор $\frac{1}{2} \overline{\rho (\mathbf{v}'' \overline{\mathbf{v}''} \cdot \mathbf{v}'')} = \frac{1}{2} \overline{\rho \mathbf{v}'' \overline{\mathbf{v}''} \cdot \mathbf{v}''}$ можно трактовать как вектор потока **турбулентной кинетической энергии (кинетической энергии турбулентности)**

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}. \quad (96)$$

Таким образом, в системе осреднённых уравнений появились дополнительные величины вызванные эффектом турбулентности. Это рейнольдсовы напряжения $\overline{\boldsymbol{\tau}}_T$, турбулентный тепловой поток $\overline{\mathbf{h}}_T$, турбулентная кинетическая энергия k , уравнения по определению которых необходимы для замыкания системы осреднённых уравнений.

При моделировании дополнительных турбулентных потоков основное допущение, наиболее часто используемое на практике, состоит в том, что эти потоки могут быть определены аналогично молекулярным потокам.

Так в 1877 г. Ж. Буссинеск предположил, что связь между турбулентными напряжениями $\overline{\boldsymbol{\tau}}_T$ и тензором скоростей деформаций осреднённого течения аналогична соответствующей связи (88), которая имеет место между вязкими молекулярными напряжениями $\boldsymbol{\tau}_M$ и тензором скоростей деформаций для ньютоновской жидкости¹⁸:

$$\overline{\boldsymbol{\tau}}_M = \overline{\mu} \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right]. \quad (97)$$

где среднее значение динамической вязкости, являющейся функцией температуры, определяется по формуле

$$\overline{\mu} = \overline{\mu(T)} = \mu(\overline{T}) \quad (98)$$

и, соответственно, связь тензора рейнольдсовых напряжений $\overline{\boldsymbol{\tau}}_T = -\overline{\rho \overline{\mathbf{v}'' \overline{\mathbf{v}''}}$ с тензором скоростей деформаций осреднённого течения определяется соотношением

$$-\overline{\rho \left(\overline{\mathbf{v}'' \overline{\mathbf{v}''}} - \frac{2}{3} k \mathbf{E} \right)} = \mu_T \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right]. \quad (99)$$

Коэффициент пропорциональности μ_T называется **турбулентной (вихревой) вязкостью**. Отметим, что присутствие в левой части слагаемого $\frac{2}{3} k \mathbf{E}$ обеспечивает совпадение инвариантов тензоров, стоящих в (99) слева и справа.

По аналогии с гипотезой Буссинеска турбулентные потоки тепла и кинетической энергии определяются через градиенты этих величин [11]:

¹⁸ Гипотеза Буссинеска используется в моделях турбулентности Спаларта-Алмараса, k - ε моделях, k - ω моделях.

$$\overline{\mathbf{h}_T} = \bar{\rho} (\overline{i'' \mathbf{v}''}) = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \nabla \tilde{i} = -\frac{\mu_T c_p}{Pr_T} \nabla \tilde{T}, \quad (100)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{\mathbf{v}'' \mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}) = -\frac{\mu_T}{\sigma_k} \nabla k. \quad (101)$$

где Pr_T – турбулентное число Прандтля, σ_k – аналог числа Прандтля для потока турбулентной кинетической энергии k (обычно полагается константой близкой к единице).

Теперь система основных уравнений Рейнольдса (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes) представляется в виде:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} + \left(\bar{p} + \frac{2}{3} k \right) \mathbf{E} - \right. \\ \left. - \mu_e \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right] \right\} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{F}} = 0, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{e})}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \left(\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{p} + \frac{2}{3} k \right) \tilde{\mathbf{v}} - \mu_e \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right] \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right. \\ \left. - k_e \nabla \tilde{T} - \frac{\mu_T}{\sigma_k} \nabla k \right\} - \bar{\rho} (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{q}) = 0, \quad (104)$$

где $\mu_e = \bar{\mu} + \mu_T$, $k_e = \bar{k} + \frac{\mu_T}{\sigma_k}$, причём среднее значение теплопроводности k , являющейся функцией температуры, определяется аналогично (98) по формуле

$$\bar{k} = \overline{k(T)} = k(\tilde{T}). \quad (105)$$

Таким образом, задача моделирования турбулентности сведена к определению коэффициента турбулентной вязкости μ_T , турбулентной кинетической энергии k , турбулентного числа Прандтля Pr_T [11].

Модели турбулентности k - ε

В настоящее время для замыкания системы уравнений Рейнольдса чаще всего используются так называемые двухпараметрические модели. Так они называются потому, что в них турбулентная вязкость μ_T определяется через два параметра, для которых решаются дополнительные дифференциальные уравнения в частных производных. При использовании семейства моделей турбулентности, получившего название **модели турбулентности k - ε** , турбулентная вязкость μ_T определяется как функция турбулентной кинетической энергии k и скорости турбулентной диссипации ε и решаются два уравнения переноса для k и ε .

Рассмотрим двухпараметрические модели турбулентности семейства k - ε , реализованные в системе ANSYS FLUENT [12]. FLUENT предлагает следующие три варианта k - ε моделей:

1. Стандартная k - ε модель (**Standard**) предложена Лаундером (Launder) и Сполдингом (Spalding) в 1972 г.
2. Ренормализационная k - ε модель (**RNG**) разработана на основе строгих статистических методов (renormalization group theory) Якхотом (Yakhot) и Орзагом (Orszag) в 1986 г.
3. Реализованная k - ε модель (**Realizable**) предложена Ши (Shih) и др. в 1995 г. "Realizable"¹⁹ означает, что модель разрешает некоторые математические ограничения Рейнольдсовых напряжений, которые имеют место в турбулентных течениях. В работе [13] этот вариант k - ε модели назван реалистичной или «физичной» моделью, подразумевающее строгую «физичную» формулировку для рейнольдсовых напряжений, что не соблюдается в стандартной или RNG k - ε моделях.

Все три модели имеют подобные формы уравнений переноса турбулентной кинетической энергии k и скорости турбулентной диссипации ε . Основное различие этих моделей заключается:

- в методе вычисления турбулентной вязкости;
- в определении турбулентного числа Прандтля, управляющего турбулентной диффузией k и ε ;
- в параметрах генерации и диссипации уравнения переноса ε .

Стандартная k - ε модель (*Standard*)

Стандартная k - ε модель турбулентности является полуэмпирической моделью, базирующейся на уравнениях переноса турбулентной кинетической энергии k и скорости диссипации ε . Уравнение переноса k имеет точную формулировку, в то время как уравнение переноса для ε получено с использованием физических рассуждений и имеет малое сходство с его точным математическим аналогом.

При выводе стандартной k - ε модели вводилось предположение, что поток является полностью турбулентным ($\mu_T \gg \mu$), и таким образом эффекты вызванные молекулярной вязкостью незначительны, это говорит о том, что стандартная k - ε модель справедлива только для полностью развитых турбулентных течений.

Турбулентная кинетическая энергия k и скорость диссипации ε представлены следующими уравнениями переноса:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \\ + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (107)$$

¹⁹ Варианты перевода (с англ.): реализуемый, осуществимый, осознаваемый, выполнимый, поддающийся пониманию.

В этих уравнениях:

G_k – производство турбулентной кинетической энергии, вызванное градиентами осредненного потока (или скорость генерации турбулентной энергии за счёт энергии осреднённого поля или скорость изъятия энергии турбулентности из осреднённого поля и её переход в кинетическую энергию турбулентности [14])

$$G_k \equiv -\overline{\rho v'' v''} \cdot \nabla \tilde{v}, \quad (108)$$

G_b – производство турбулентной кинетической энергии, вызванное плавучестью (учитывается при одновременном наличии ненулевого гравитационного поля и градиента температуры)

$$G_b \equiv \beta \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mu_T}{Pr_T} \nabla \tilde{T} \right), \quad (109)$$

где

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

– коэффициент теплового расширения;

\mathbf{g} – вектор гравитационного ускорения;

$Y_M = 2\bar{\rho}\epsilon M_T^2$ – параметр характеризующий пульсации вызванные расширением в сжимаемых турбулентных потоках (для потоков с большим числом Маха сжимаемость влияет на турбулентность с помощью так называемой «диссипации дилатации»²⁰), которой обычно пренебрегают при моделировании несжимаемых потоков);

$$M_T = \sqrt{\frac{\kappa}{a^2}}$$

– турбулентное число Маха;

$a = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука;

$C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 3}$ – эмпирические константы модели;

$\sigma_k, \sigma_\epsilon$ – турбулентные числа Прандля для k и ϵ соответственно;

S_k, S_ϵ – источники, определяемые пользователем, для k и ϵ соответственно.

Турбулентная (или вихревая) вязкость μ_T является функцией k и ϵ , и определяется выражением Колмогорова-Прандля:

$$\mu_T = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (110)$$

где C_μ – эмпирическая константа.

Константы модели $C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon$ по умолчанию имеют следующие значения:

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3. \quad (111)$$

Стандартная k - ϵ модель позволяет рассчитывать некоторые турбулентные течения с точностью, достаточной для многих инженерных расчётов. Од-

²⁰ Дилатация (от лат. *dilato* – расширять) – расширение, растяжение.

нако существуют определённые типы течений, где этот вариант k - ε модели приводит к большим ошибкам: закрученные потоки, течения с большими неблагоприятными (способствующими отрыву) градиентами давления, течения с большими зонами отрыва, осесимметричные струи и некоторые другие. Напомним, что стандартная k - ε модель имеет теоретическое обоснование только для полностью развитой турбулентности, поэтому в пристеночных узлах используются пристеночные функции [14].

Ренормализационная k - ε модель (RNG)

RNG модель двухпараметрического семейства k - ε моделей получена на основе теоретического анализа уравнений Навье–Стокса (методами, заимствованными из теории ренормализованных групп, *Renormalization Group (RNG) Method*). Структура уравнений переноса для кинетической энергии турбулентности k и скорости её диссипации ε аналогична, но в записи источников и формулы для турбулентной вязкости есть различия.

Турбулентная кинетическая энергия k и скорость диссипации ε представлены следующими уравнениями переноса:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\nu}) = \nabla \cdot (\alpha_k \mu_e \nabla k) + G_k + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\nu}) = \nabla \cdot (\alpha_\varepsilon \mu_e \nabla \varepsilon) + \\ + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (113)$$

В этих уравнениях величины G_k , G_b , Y_M , S_k , S_ε аналогичны стандартной k - ε модели, константы модели $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_k , σ_ε по умолчанию имеют следующие значения:

$$C_{1\varepsilon} = 1.42, C_{2\varepsilon} = 1.68, \sigma_k = 0.72, \sigma_\varepsilon = 0.72. \quad (114)$$

Для определения μ_T при малых числах Рейнольдса (это важно для пристеночных течений) используется специальное дифференциальное уравнение (*Differential Viscosity Model* в *RNG Options*), решение которого даёт зависимость μ_T от k и ε . В пределе больших чисел Рейнольдса турбулентная вязкость μ_T определяется формулой Колмогорова–Прандтля (110), где рекомендуемое значение константы $C_\mu = 0.0845$ ²¹ (*Model Constants*). Кроме того, ANSYS Fluent предлагает возможность использования модификации турбулентной вязкости для учёта влияния закрутки потока, если она имеется (*Swirl Dominated Flow* в *RNG Options*). Числа α_k и α_ε играют роль обратных чисел Прандтля, и в пределе больших чисел Рейнольдса рекомендуемые значения равны $\alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.393$. При умеренных числах Рейнольдса для определения α_k и α_ε решается специальное трансцендентное уравнение [12].

²¹ Интересно отметить, что это значение C_μ очень близко к эмпирически определенному значению $C_\mu = 0.09$, используемому в стандартной k - ε модели.

Основное различие между *RNG* и стандартной k - ε моделями заключается в дополнительном слагаемом в уравнении (113) для ε , заданным

$$R_\varepsilon = C_\mu \bar{\rho} \frac{\eta^3 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}, \quad (115)$$

где $\eta = \bar{S} \frac{k}{\varepsilon}$, $\bar{S} = \sqrt{2\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}}}$, $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$. Это слагаемое учитывает, что в областях с большой скоростью деформации осреднённого поля скорости (т.е. там, где $\eta_0 > \eta$ или $\bar{S} > 4.38 \frac{\varepsilon}{k}$) скорость убывания величины ε уменьшается по сравнению со стандартной версией k - ε модели. Это приводит к бóльшим значениям ε и меньшим значениям k и μ_T . Этим объясняется то, что модель *RNG* лучше описывает некоторые течения с большой кривизной линий тока, чем стандартная k - ε модель.

Уравнения *RNG* k - ε модели могут применяться в пограничном слое вплоть до поверхностей стенок, при условии соответствующего измельчения сетки в вязком подслое. Если сетка в этой области недостаточно подробна, активируется один из видов пристеночных функций [15].

Опыт применения данной модели показал улучшенное (по сравнению со стандартной версией k - ε модели) согласование расчётных и экспериментальных данных для некоторых типов течений, в частности при относительно малых числах Рейнольдса, большой кривизне линий тока и в областях больших деформаций поля скорости [14].

Реализованная k - ε модель (*Realizable*)

В этой модели введена новая формулировка турбулентной вязкости и предложена более обоснованная формулировка уравнения переноса скорости турбулентной диссипации ε , полученная из уравнения переноса средней завихренности. Это связано со строгой «физической» формулировкой для рейнольдсовых напряжений [13], которая означает следующее.

Для нормальных рейнольдсовых напряжений из предположения Буссинеска (99) можно получить следующее соотношение

$$\overline{\rho(u'')^2} = \frac{2}{3} \bar{\rho} k - \frac{\mu_T}{\bar{\mu}} \bar{\tau}_M. \quad (116)$$

Очевидно, что левая часть должна принимать только положительные значения, однако, в некоторых случаях при высоких напряжениях она становится отрицательной, т.е. соотношение становится нефизичным.

Аналогично для касательных рейнольдсовых напряжений в случае резкого изменения скоростей деформации может не соблюдаться неравенство Коши–Буняковского–Шварца

$$\overline{uv}^2 \leq \overline{u^2 v^2}. \quad (117)$$

Исходя из этого, в «физической» k - ε модели коэффициент C_μ записывается как функция от скоростей деформации $\bar{\mathbf{D}}$ и турбулентных характеристик k и ε

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{\kappa U^*}{\varepsilon}} \quad (118)$$

где $A_0 = 4.04$, $U^* = \sqrt{\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^* \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}}^*}$, $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$, $\phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W)$, $W = \frac{\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}}}{(\sqrt{\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}}})^3}$. Тензор второго ранга $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^*$ находится из соотношения

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^* = \bar{\boldsymbol{\Omega}} - 2\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (119)$$

где $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\boldsymbol{v}}^T - \nabla \tilde{\boldsymbol{v}})$ тензор завихрённости, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости для систем с вращением.

Увеличенную скорость диссипации, наблюдаемую при сравнении экспериментальных данных и численных расчетов, в реалистичной κ - ε модели лимитируют измененным уравнением для переноса скорости диссипации. В результате данная модель использует то же уравнение переноса кинетической энергии, что и стандартная κ - ε модель. Отличие содержится в модифицированном уравнении переноса скорости турбулентной диссипации и в зависимости C_μ от параметров потока. Таким образом, турбулентная кинетическая энергия κ и скорость диссипации ε представлены следующими уравнениями переноса:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \kappa)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \kappa \tilde{\boldsymbol{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \nabla \kappa \right] + G_\kappa + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M + S_\kappa, \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\boldsymbol{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \\ + C_1 \bar{\rho} \bar{S} \varepsilon - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{\kappa + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} C_{\varepsilon 3} G_b + S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (121)$$

В этих уравнениях величины σ_κ , σ_ε , G_κ , G_b , Y_M , S_κ , S_ε аналогичны стандартной κ - ε модели. Константы модели $C_{\varepsilon 1}$, C_2 , σ_κ , σ_ε установлены из соответствия определённым каноническим потокам:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_2 = 1.9, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.2. \quad (122)$$

Коэффициент C_1 определяется следующим образом

$$C_1 = \max \left(0.43; \frac{\eta}{\eta + 5} \right), \eta = \bar{S} \frac{\kappa}{\varepsilon}, \bar{S} = \sqrt{2 \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}}}. \quad (123)$$

Оказалось, что эта модель турбулентности описывает некоторые виды течений лучше, чем стандартная κ - ε модель. Прежде всего, следует отметить осесимметричную затопленную струю, расчёт которой по стандартной модели даёт существенно больший угол раскрытия, чем наблюдается в экспериментах. Преимущества реалистичной κ - ε модели очевидны на примерах плоской и круглой струи, течениях с большой кривизной линии тока и закруткой течения, течениях с отрывом, с вторичными течениями [13, 14].

Пример двумерной модели

В качестве примера рассмотрим двумерное (плоское) турбулентное течение вязкой сжимаемой жидкости с учётом эффектов конвективного теплопереноса и теплопроводности. Для замыкания уравнений Рейнольдса используем стандартную k - ε модель турбулентности. Объёмными силами и источниками тепла пренебрегаем. Такая модель использовалась при решении задачи о распространении и взаимодействии ударных волн [16] (стр. 219-226).

Для учёта сжимаемости в систему уравнений включается осреднённое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (124)$$

которое в декартовой прямоугольной системе координат представляется следующим образом

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_y)}{\partial y} = 0. \quad (125)$$

Осреднённое уравнение движения (103) при отсутствии объёмных сил

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}) = \\ = -\nabla \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \kappa \right) + \nabla \cdot \left\{ \mu_e \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

В декартовой прямоугольной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v}_y \tilde{v}_x) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \kappa \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_e \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right) \right] - \\ - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_e \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \tilde{v}_x \tilde{v}_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \tilde{v}_y \tilde{v}_y) = \\ = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \kappa \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_e \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right) - \\ - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_e \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии k (106):

$$\frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} k \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k + G_b - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (129)$$

В декартовой прямоугольной системе координат и без учёта плавучести ($G_b = 0$), пульсаций расширения $Y_M = 0$ и дополнительных источников $S_k = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \kappa)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \kappa \tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \kappa \tilde{v}_y) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right] + G_\kappa - \bar{\rho} \varepsilon, \end{aligned} \quad (130)$$

Уравнение переноса диссипации ε (107):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \\ + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} (G_\kappa + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} + S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (131)$$

В декартовой прямоугольной системе координат, без учёта плавучести ($G_b = 0$) и дополнительных источников $S_\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \varepsilon \tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \varepsilon \tilde{v}_y) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} G_\kappa - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{\kappa}. \end{aligned} \quad (132)$$

В уравнениях (129)-(132) $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ – эмпирические константы модели, σ_κ , σ_ε – турбулентные числа Прандтля для κ и ε соответственно, G_κ – производство турбулентной кинетической энергии, вызванное градиентами осредненного потока (108)

$$G_\kappa \equiv -\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}, \quad (133)$$

которое в соответствии с (99) и (97) представляется в виде:

$$\begin{aligned} G_\kappa = \left(\frac{\mu_T}{\bar{\mu}} \bar{\tau}_M - \frac{2}{3} \bar{\rho} \kappa \mathbf{E} \right) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} = \\ = \left\{ \mu_T \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{E} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} \kappa \mathbf{E} \right\} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} = \\ = \mu_T \left[(\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})^2 \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} \kappa (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}), \end{aligned} \quad (134)$$

и в декартовой прямоугольной системе координат (на плоскости) записывается в виде:

$$\begin{aligned} G_\kappa = 2 \left\{ \mu_T \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{3} \bar{\rho} \kappa \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (135)$$

Турбулентная (или вихревая) вязкость μ_T является функцией κ и ε , и определяется выражением Колмогорова-Прандтля (110):

$$\mu_T = \bar{\rho} C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (136)$$

где C_μ – эмпирическая константа.

В системе ANSYS Fluent константы модели $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, C_{μ} , σ_k , σ_{ε} по умолчанию имеют следующие значения:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\mu} = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3. \quad (137)$$

Уравнение энергии (переноса тепла) – (104) – представленное через удельную энтальпию при отсутствии объёмных источников ($\tilde{\mathbf{F}} = 0$, $\tilde{q} = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{h})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot (k_e \nabla \tilde{T}) + \\ + \bar{\tau}_M \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \cdot (\bar{\mu} \nabla k) + \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{p} \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{p} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (138)$$

в декартовой прямоугольной системе координат (на плоскости)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{c}_p \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{c}_p \tilde{T} \tilde{v}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{c}_p \tilde{T} \tilde{v}_y) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_e \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_e \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + 2\bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ - \nabla \cdot (\bar{\mu} \nabla k) + \bar{\rho} \varepsilon + \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{p} \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{p} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (139)$$

Выделенные слагаемые отличают уравнения от приведённых в работе [16] (стр. 219-226).

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел. Учебное пособие. – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008. – 143 с.
4. Ковеня В.М., Чирков Д.В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. – 86 с.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник. 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
7. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 296 с.
8. Харламов С.Н. Алгоритмы при моделировании гидродинамических процессов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2008. – 80 с.
9. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости: гидромеханика, перемешивание и теплообмен. – М.: Мир, 1964. – 216 с.
10. Аникеев А.А., Молчанов А.М., Янышев Д.С. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики: учебное пособие. – М.: URSS, 2010. – 149 с.
11. Молчанов А.М. Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассобмена. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 206 с.
12. Ansys Inc. ANSYS FLUENT 12.0/12.1 Documentation. ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide [Электронный ресурс] // CRESCO Virtual Lab NEPTUNIUS: [сайт]. [2009]. URL: <http://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/index.htm> (дата обращения: 30.11.2018).
13. Юн А.А. Исследование течений и прочностной анализ. 3-е изд. – М.: URSS: ЛЕНАНД, 2014. – 427 с.
14. Снегирёв А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн.ун-та, 2009. – 143 с.
15. Батурин О.В., Батурин Н.В., Матвеев В.Н. Расчет течений жидкостей и газов с помощью универсального программного комплекса Fluent. Учеб. пособие. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. – 151 с.
16. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство / Под ред. проф. А.К. Любимова. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2006. – 227 с.
17. Пальмов В.А. Теория определяющих уравнений в нелинейной

термомеханике деформируемых тел. Учебное пособие. – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008. – 113 с.

Приложение. Формулы вычисления интенсивностей

Интенсивность нормальных напряжений (*normal stress intensity*) – в ANSYS называется *von Mises* или *equivalent stress*

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{3J_2(\text{dev}\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{3}{2}\text{dev}\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\sigma}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.\end{aligned}$$

Интенсивность касательных напряжений (*tangential (shear) stress intensity*)

$$\begin{aligned}\tau_i &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i = \sqrt{J_2(\text{dev}\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{2}\text{dev}\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\sigma}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)}.\end{aligned}$$

Интенсивность скоростей деформаций (*strain rate intensity*)

$$d_i = \sqrt{\frac{4}{3}J_2(\text{dev}\mathbf{D})} = \sqrt{\frac{2}{3}\text{dev}\mathbf{D} \cdot \text{dev}\mathbf{D}}.$$

Интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$s_i = 2\sqrt{J_2(\text{dev}\mathbf{D})} = \sqrt{2\text{dev}\mathbf{D} \cdot \text{dev}\mathbf{D}} = \sqrt{3}d_i.$$

Октаэдрическая деформация

$$\varepsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Октаэдрический сдвиг

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{окт}} &= \frac{2}{3}\sqrt{6J_2(\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{2}{3}\sqrt{3\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}} = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.\end{aligned}$$

Интенсивность деформаций (линейных, продольных)

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2(\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Интенсивность деформаций сдвига (*shear strain intensity*)

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_{\text{окт}} = \sqrt{3} \varepsilon_i = 2 \sqrt{J_2(\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon})} = \sqrt{2 \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

В системе ANSYS используется эквивалентная деформация – *von Mises* или *equivalent strain*

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \frac{1}{1 + \nu'} \sqrt{\frac{1}{2} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]} = \\ &= \frac{1}{1 + \nu'} \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{dev}\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \nu'} \sqrt{3 J_2(\text{dev}\boldsymbol{\varepsilon})}, \end{aligned}$$

где ν' – эффективный коэффициент Пуассона, который определяется как коэффициент Пуассона материала для упругих и тепловых деформаций, вычисленных при нормальной температуре тела, и равен 0.5 для пластических деформаций.

Александр Васильевич **Жидков**
Александр Константинович **Любимов**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.