

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**А.Л. Пригоровский
В.М. Сандалов
А.А. Ширяева**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ
КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЧАСТЬ 2**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией
Института информационных технологий, математики и механики для
студентов ННГУ, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная
математика и информатика» и специальности 01.05.01 «Фундаментальные
математика и механика»

Нижний Новгород

2020

УДК 534.01 (075.8)

ББК В 323.1 я 73

П75

Пригоровский А.Л., Сандалов В.М., Ширяева А.А. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ, УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧАСТЬ 2: учебно-метод. пособие. – Нижегородский госуниверситет ННГУ, 2020. – 42 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук **М.М. Коган**

Настоящий сборник задач необходим для студентов и аспирантов, специализирующихся по прикладной математике и информатике, изучающих теорию линейных и в, основном, нелинейных колебаний, устойчивость движения и элементы качественного исследования эволюционных систем. В нем говорится о замкнутых фазовых траекториях и о построении фазовых портретов. Рассмотрены индексы Пуанкаре, критерии Дюлака и Бендиксона об отсутствии замкнутых фазовых траекторий, автоколебания, задачи на эти разделы. Для самостоятельной работы приведены контрольные вопросы и около 80 задач. Ко многим из них даны ответы и указания. Сборник задач может быть также полезен студентам радиофизического и физического факультетов, изучающих колебания.

УДК 534.01 (075.8)

ББК В 323.1 я 73

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, 2020

Оглавление

Введение	4
1. Индексы Пуанкаре особых точек и замкнутых фазовых траекторий	5
1.1. Основные факты теории индексов.....	5
1.2. Задачи для самостоятельной работы	7
2. Критерии Дюлака и Бендиксона отсутствия замкнутых фазовых траекторий.....	9
2.1. Критерии Дюлака и Бендиксона для односвязной области	9
2.2. Задачи.....	9
2.3. Критерий Дюлака для кольцевой области	10
2.4. Задачи для самостоятельной работы	16
3. Простейшие консервативные системы в механике	18
3.1. Определение консервативных систем и первый интеграл	18
3.2. Задачи.....	19
3.3. Задачи для самостоятельной работы	22
4. Автоколебательные системы	24
4.1. Определение автоколебаний.....	24
4.2. Задача	24
4.3. Задачи для самостоятельной работы	25
5. Качественное построение фазовых портретов конкретных динамических систем второго порядка	27
5.1. Задачи.....	27
5.2. Задачи для самостоятельной работы	34
Литература	41

Введение

Существует большое количество учебной литературы по теории колебаний и устойчивости движения, однако сборников задач в этом направлении недостаточно. В связи с этим представленная работа является актуальной в настоящее время. Данная часть учебно-методического пособия посвящена построению фазовых портретов (ФП) динамических систем (ДС) второго порядка.

В этой части сборника задач рассказывается о замкнутых фазовых траекториях (ЗФТ), о свойствах существования и критериях их отсутствия. Одна из глав посвящена индексам Пуанкаре особых точек. В ней показано как вычислять его аналитическим и геометрическим способом. Именно геометрический способ является новым методом вычисления индекса, разработанный одним из авторов этого пособия. В основной части этого сборника задач изложены алгоритмы построения ФП автономных консервативных и неконсервативных ДС второго порядка. Эти алгоритмы являются достижениями, в основном, относящиеся к школе по нелинейным колебаниям академика А.А. Андропова и его учеников. Параграф работы (в небольшом объеме) посвящен автоколебаниям, которые часто встречаются при исследовании конкретных эволюционных систем. При построении ФП также применяется принцип кольца. В каждом разделе показано как решать задачи на соответствующую тему, а в конце глав приведены задачи для самостоятельной работы, всего их около 80 штук. Для большей части этих заданий приведены ответы и указания.

Подводя итог, для качественного построения ФП достаточно знать поведение особых траекторий: особых точек, предельных циклов (ПЦ) и сепаратрис седел. Если известно взаимное расположение особых траекторий и определена устойчивость ПЦ и состояний равновесия (СР), то этого достаточно для построения полной качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории.

1. Индексы Пуанкаре особых точек и замкнутых фазовых траекторий

Понятие индекса основано на понятии вращения векторного поля. На простой замкнутой кривой задано непрерывное векторное поле. Вращение этого поля вдоль кривой – это число полных оборотов, которое делает вектор поля при обходе этой кривой в положительном направлении, причем однократном. Индекс Пуанкаре изолированного СР динамической системы есть вращение векторного поля, определяемого этой системой, вдоль любой достаточно малой замкнутой кривой, содержащей СР внутри себя.

Индексы Пуанкаре позволяют сформулировать некоторые общие законы совместного существования СР и ЗФТ как изолированных (предельные циклы), так и неизолированных. Как известно, индекс особой точки — это индекс простой замкнутой кривой, охватывающей эту и только эту особую точку. Индексы Пуанкаре часто применяются при построении фазовых портретов ДС.

1.1. Основные факты теории индексов

Перечислим основные факты теории индексов:

1. Для простых особых точек ($\Delta \neq 0$) [1] индексы таковы: для седла $j = -1$, для узла, фокуса (независимо от их устойчивости) и центра $j = +1$. Приведем пример геометрического вычисления индекса особой точки, например, седла (рис. 1). Окружим седло замкнутой кривой N и обойдем эту кривую против часовой стрелки. Вычислим угол поворота векторного поля, создаваемого интегральными кривыми (начало движения по кривой, например, с оси абсцисс). На рисунке 1 буква «н» означает начало движения, а «к» – конец.

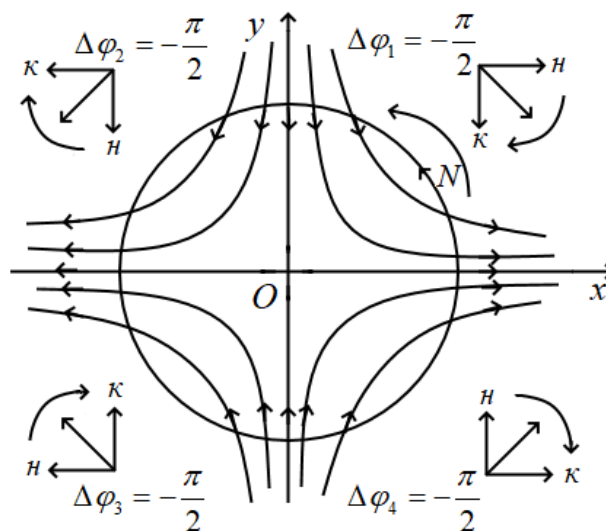


Рис. 1

Тогда в первой четверти угол поворота векторного поля $\Delta\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$. Аналогично $\Delta\varphi_i$ вычисляется и в остальных четвертях. Тогда общее $\Delta\varphi$ находится по формуле

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^4 \Delta\varphi_i = -2\pi,$$

а индекс Пуанкаре вычисляется следующим образом:

$$j = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Значит, индекс седла равен $j = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1$.

2. Индекс замкнутой кривой, не содержащей внутри себя ни одной особой точки, равен нулю.
3. Индекс кривой, являющейся ЗФТ, равен +1.
4. Из теории индексов следует, что внутри ЗФТ находится по крайней мере одна особая точка.
5. Если внутри ЗФТ находится только одна особая точка, то эта точка не седло и не какая-либо другая точка с индексом, отличным от +1.
6. Если внутри ЗФТ есть несколько простых особых точек, то число их всегда нечетно, причем число седел всегда на единицу меньше числа остальных особых точек.

Пусть задана автономная ДС на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

и состояния этой системы взаимно однозначно и непрерывно соответствуют точкам фазовой плоскости x, y . Функции P и Q аналитичны везде и не имеют общих множителей, обращающихся в нуль в конечной части плоскости x, y .

Для ДС (1) с аналитическими правыми частями на всей фазовой плоскости индекс j замкнутой кривой N может быть вычислен по формуле [2]

$$j = \frac{1}{2\pi} \oint_N d\{\arctg \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}\} = \frac{1}{2\pi} \oint_N \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

1.2. Задачи для самостоятельной работы

1. Аналитически и геометрически вычислите индексы простых особых точек. Указание: смотри приложение 3 работы [3].
2. Определите индексы сложных особых точек, представленных на рис. 2-10.

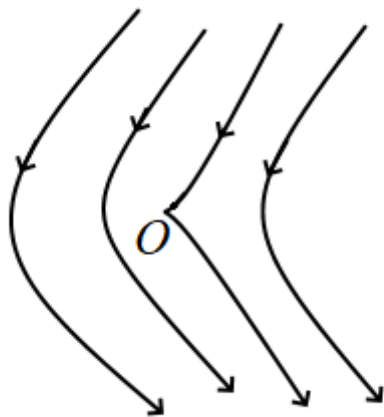


Рис. 2

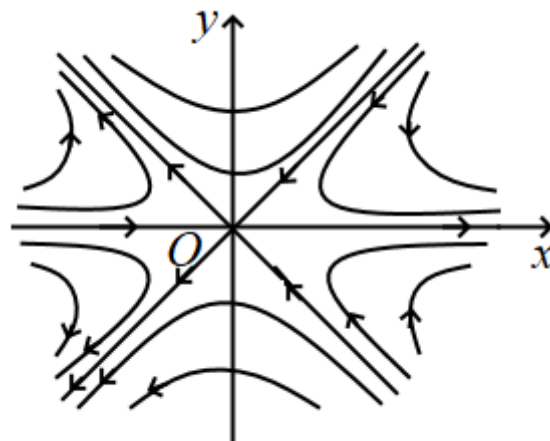


Рис. 3

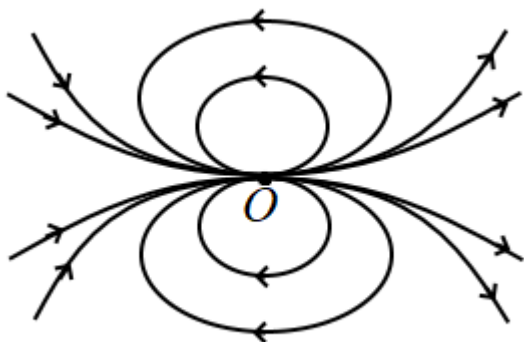


Рис.4

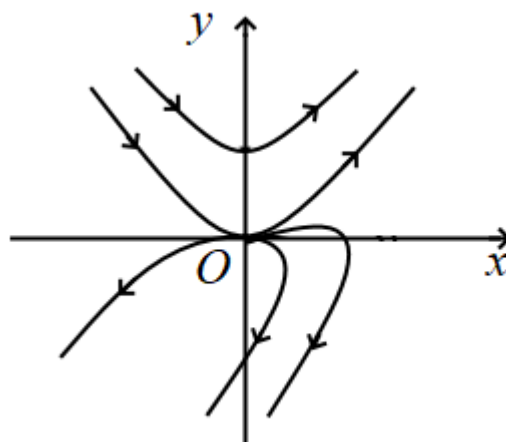


Рис.5

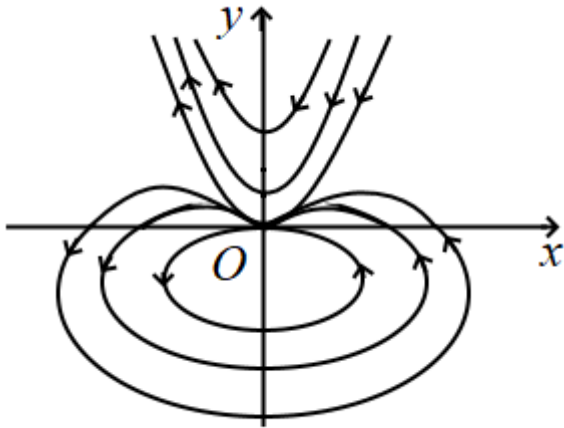


Рис.6

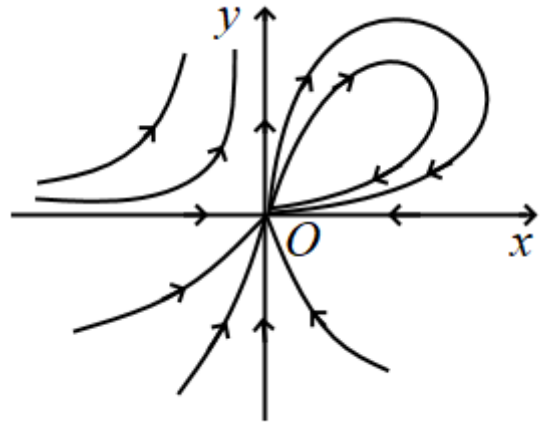


Рис.7

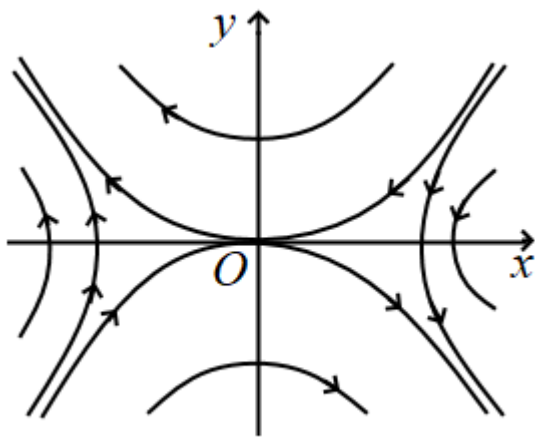


Рис.8

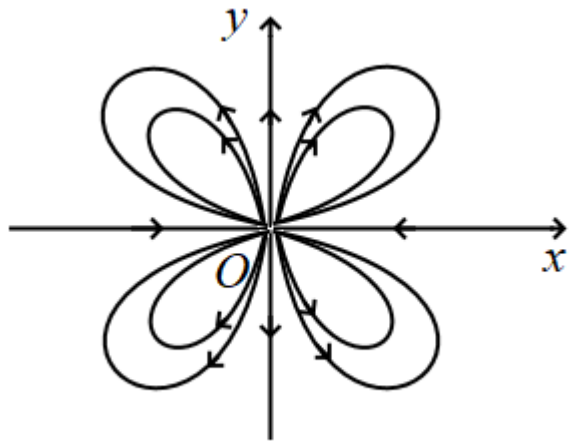


Рис. 9

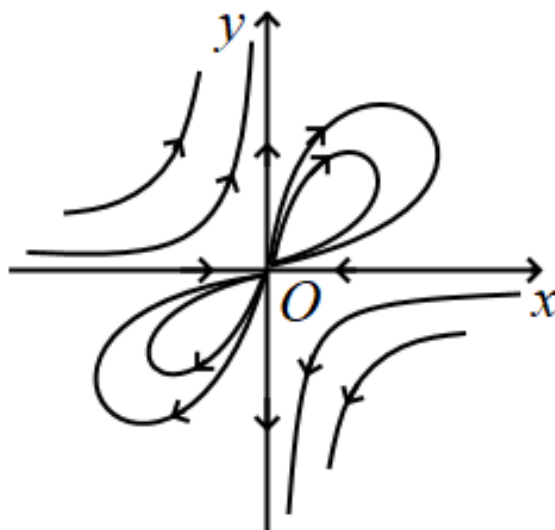


Рис. 10

2. Критерии Дюлака и Бендиксона отсутствия замкнутых фазовых траекторий

Для системы (1) с аналитическими правыми частями теория дает, к сожалению, лишь достаточные условия отсутствия ЗФТ (вспомните, что такое необходимые и достаточные условия).

2.1. Критерии Дюлака и Бендиксона для односвязной области

Критерий Дюлака для односвязной области.

Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна вместе с первыми частными производными и в некоторой односвязной области G на фазовой плоскости системы (1) выражение

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}(FP) + \frac{\partial}{\partial y}(FQ) \quad (2)$$

знакопостоянно. Тогда в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (1). Выбор функции $F(x, y)$ при решении конкретных задач непросто.

Частный случай критерия Дюлака, когда $F(x, y) \equiv 1$, называется *критерием Бендиксона*.

2.2. Задачи

Рассмотрим некоторые задачи с решениями.

Задача 1. Докажите отсутствие периодических колебаний в осцилляторе с квадратичным трением.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x}^2 + \varphi(x) = 0, \quad (3)$$

где a и b – постоянные коэффициенты и $a \neq 0$.

Решение. Перейдем от уравнения (3) к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \equiv P(x, y) \\ \dot{y} = -ay - by^2 - \varphi(x) \equiv Q(x, y) \end{cases}$$

и выберем в критерии Дюлака в качестве функции $F = e^{2bx}$. Получим из (2) $D = -ae^{2bx}$, то есть при любых $\varphi(x)$ и при $a \neq 0$ D не меняет знака и не равно нулю тождественно на всей фазовой плоскости (x, y) , что и доказывает отсутствие ЗФТ в системе (3).

Задача 2. Дано уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x} \sin^2 x + \alpha(e^x - 1) = 0, \quad (4)$$

где $\alpha = \text{const} \neq 0$.

Выясните тип СР $x = 0, \dot{x} = 0$. Существуют ли ЗФТ?

Решение. Перейдем от уравнения (4) к равносильной системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y \sin^2 x - \alpha(e^x - 1) \end{cases} \quad (5)$$

Характеристическое уравнение для точки $x = y = 0$: $\lambda^2 + \alpha = 0$. Значит, СР $x = y = 0$ – седло при $\alpha < 0$ и центр при $\alpha > 0$ (в линеаризованной системе). Покажем, что в исходной нелинейной системе (5) нет ЗФТ. Применим критерий Бендиксона: $D = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} [-y \sin^2 x - \alpha(e^x - 1)] = -\sin^2 x$. Выражение D не меняет знака и не равно нулю тождественно. Следовательно, при $\alpha > 0$ точка $x = 0, \dot{x} = 0$ – сложный фокус.

2.3. Критерий Дюлака для кольцевой области

В двусвязной (кольцевой) области G система (1) не может иметь более одной ЗФТ, если в этой области выражение $D = \frac{\partial}{\partial x}(FP) + \frac{\partial}{\partial y}(FQ)$, где функция $F(x, y) \in C^{(1)}$ в G , знакопостоянно.

Задача 3. Дана динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda x - x(2x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + \lambda y - y(2x^2 + y^2) \end{cases}, \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

Существует ли в этой системе ПЦ и если да, то сколько?

Решение. Выберем $V = x^2 + y^2 > 0, \forall x, y$,

тогда $\dot{V}_{(6)} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = -2(x^2 + y^2)(2x^2 + y^2 - \lambda)$ и $\dot{V}_{(6)} < 0$ вне эллипса $2x^2 + y^2 - \lambda = 0$ и $\dot{V}_{(6)} > 0$ внутри этого эллипса. Таким образом, внутри окружности $x^2 + y^2 = \frac{\lambda}{2}$ и вне $x^2 + y^2 = \lambda$ окружности ПЦ нет. Все траектории, проходящие через точки этих окружностей, входят внутрь кольца между ними. Поэтому в кольце должно быть нечетное число циклов, причем число устойчивых циклов должно быть на единицу больше числа неустойчивых. Докажем единственность ПЦ в этом кольце. Имеем

$$D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -2(4x^2 + 2y^2 - \lambda). \text{ Нетрудно понять, что эллипс } 4x^2 + 2y^2 - \lambda = 0$$

(то есть $2x^2 + y^2 = \frac{\lambda}{2}$) лежит целиком внутри меньшей окружности $x^2 + y^2 = \frac{\lambda}{2}$,

поэтому внутри рассматриваемого кольца выражение D сохраняет знак.

Итак, согласно критерию Дюлака для кольца ПЦ единственный (рис. 11). Изложенный прием доказательства можно назвать принципом кольца.

Приведем еще несколько признаков отсутствия замкнутых траекторий, следующих из теории индексов Пуанкаре:

1. Если у системы (1) нет особых точек, то у нее не может быть и ЗФТ.
2. Если в системе (1) существует только одна особая точка с индексом, отличным от $+1$, то в этой системе не может быть ЗФТ.
3. Если в системе (1) имеются только простые особые точки и если через все точки с индексом $+1$ проходят интегральные кривые, уходящие в бесконечность, то такая система не допускает ЗФТ.
4. Если у системы (1) есть несколько особых точек, сумма индексов которых в *любой комбинации* равна $+1$, то в такой системе нет ЗФТ.

Иногда вопрос об отсутствии ЗФТ легко решается анализом направлений пересечения фазовыми траекториями каких-либо характерных линий (например, осей координат, главных изоклин и т.д.). Приведем пример.

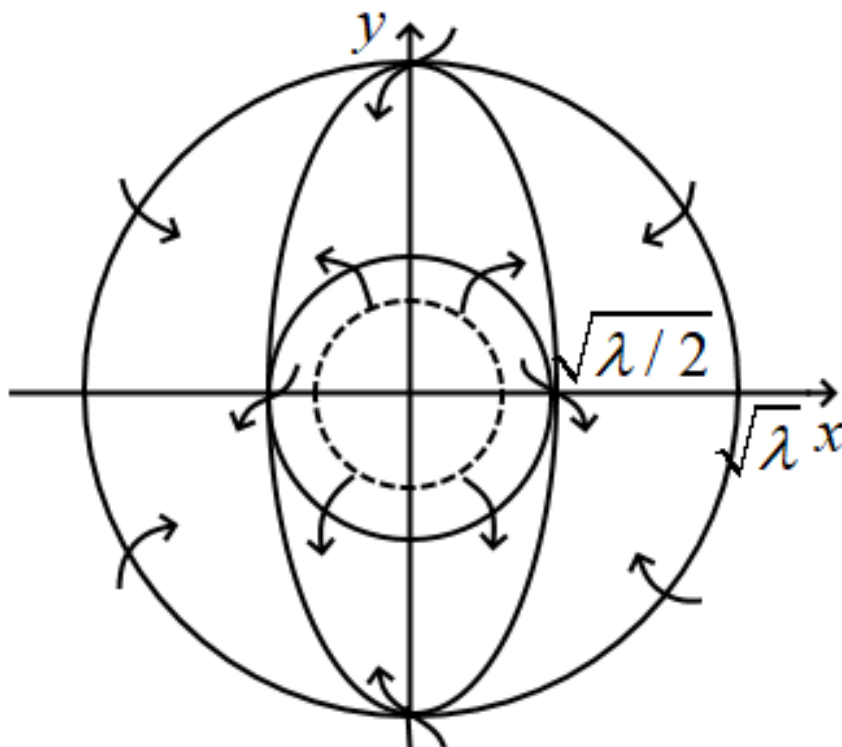


Рис. 11

Задача 4. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = [\varphi(x) + ay](1 + bx + y^2), \\ \dot{y} = x - cy \end{cases}, \varphi(0) = 0, a > 0.$$

Существуют ли ЗФТ, охватывающие начало координат?

Решение. Вычислим $\dot{x}|_{x=0} = ay(1 + y^2)$, $\dot{y}|_{y=0} = x$.

Поле направлений, соответствующее этим соотношениям, представлено на рисунке 12. Отсюда видно, что ЗФТ, *охватывающие* начало координат, отсутствуют.

ЗФТ бывают изолированные и неизолированные [3]. Неизолированные ЗФТ отображают периодические колебания, амплитуда которых определяется только начальными условиями. Например, таковы колебания в консервативных системах.

Замкнутые изолированные фазовые траектории называют ПЦ, которые могут быть орбитно устойчивыми и неустойчивыми [3].

Устойчивый ПЦ – геометрический образ автоколебательного режима [3, 4], поэтому с теоретической точки зрения вопрос об отсутствии или существовании автоколебаний в системе, отображаемой уравнениями (1), сводится к вопросу об отсутствии или существовании устойчивых ПЦ на фазовой плоскости x, y .

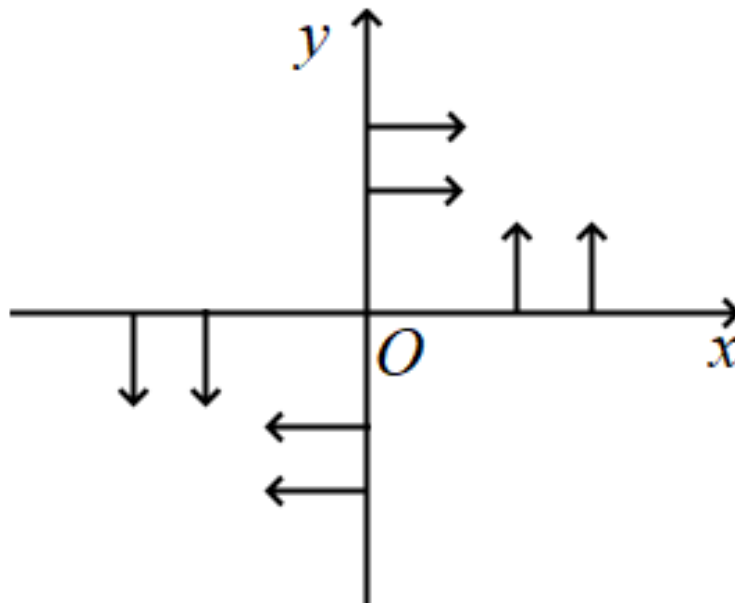


Рис. 12

Довольно часто при доказательстве отсутствия или существования ПЦ целесообразно использовать функции Ляпунова.

Задача 5. Дано уравнение

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + ax = 0, \quad F(0) = 0. \quad (7)$$

Для него:

1. Докажите, что ПЦ не существуют в следующих двух случаях:
 - а. $F(y)$ монотонная функция при всех y ;
 - б. $F(y) > 0$ при $y > 0$; $F(y) < 0$ при $y < 0$, $a > 0$.
2. Исследуйте тип и устойчивость решения $x = 0, \dot{x} = 0$ в обоих случаях.

Решение.

1. Перепишем (7) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - F(y) \end{cases} \quad (8)$$

- а. Имеем по Бендиксону $D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -F'(y)$.

Значит, D одного знака, следовательно, ЗФТ не существуют.

- б. Предыдущее доказательство не проходит. Возьмем

$$V(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2. \quad (9)$$

Тогда $\dot{V}_{(8)} = ax\dot{x} + y\dot{y} = -yF(y) \leq 0$. Функция (9) положительно определена во всем фазовом пространстве; ее производная при всех x, y – знакопостоянная отрицательная, но $\dot{V}_{(8)} = 0$ при $y = 0$ и любых x . Однако у системы (8) не существует решения $x(t) \neq 0, y(t) \equiv 0$, (отличного от тривиального), так как из второго уравнения системы (8) при $y(t) \equiv 0$ вытекает $x \equiv 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы Барбашина и Красовского, и точка $x = y = 0$ асимптотически устойчива, причем в целом.

2. Характеристическое уравнение соответствующей линеаризованной системы таково: $\lambda^2 + F'(0)\lambda + a = 0$.

Значит, при $a < 0$ особая точка $x = 0, y = 0$ – седло; при $a > 0, F'(0) > 0$ – устойчивый узел (фокус); при $a > 0, F'(0) < 0$ – неустойчивый узел (или фокус).

Задача 6. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - 2y - a^2 x(x^2 + y^2)^2 \\ \dot{y} = 2x + \mu y - b^2 y(x^2 + y^2)^2 \end{cases} \quad (10)$$

1. Определите тип и устойчивость СР $x = y = 0$ в зависимости от значений μ :
 - a. $\mu > 0$;
 - b. $\mu < 0$;
 - c. $\mu = 0$.
2. Докажите, что при $\mu > 0$ существуют автоколебания.

Решение.

1. Линеаризованная в окрестности нуля система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - 2y \\ \dot{y} = 2x + \mu y \end{cases}, \quad |\vec{r}| \ll 1,$$

а характеристическое уравнение будет $(\lambda - \mu)^2 + 4 = 0$, тогда его корни следующие $\lambda_{1,2} = \mu \pm 2i$. Отсюда следует, что при $\mu > 0$ точка $(0,0)$ – неустойчивый фокус; при $\mu < 0$ – устойчивый фокус; при $\mu = 0$ – центр в линеаризованной системе. Рассмотрим дополнительно случай $\mu = 0$. Пусть $V = x^2 + y^2$. Тогда $\dot{V}_{(10)} = -2(a^2 x^2 + b^2 y^2)(x^2 + y^2)^2$. Так как V положительно определенная, а $\dot{V}_{(10)}$ отрицательно определенная при любых x и y , то точка $(0,0)$ – асимптотически устойчивое СР (типа сложного фокуса).

2. Рассмотрим уравнение (10) при $\mu > 0$. Вновь выберем $V = x^2 + y^2$ и вычислим $\dot{V}_{(10)} = 2\mu(x^2 + y^2) - 2(a^2 x^2 + b^2 y^2)(x^2 + y^2)^2$. Отсюда следует, что $\dot{V}_{(10)} < 0$, если $x^2 + y^2$ – достаточно велико. Геометрически это означает, что любая окружность $x^2 + y^2 = R^2$ достаточно большого радиуса R пересекается траекториями в направлении снаружи внутрь. Внутри этой окружности находится единственное СР – неустойчивый фокус. Следовательно, внутри этой окружности находится, по крайней мере, один устойчивый ПЦ, то есть система автоколебательна.

Задача 7. Для системы, заданной в полярных координатах, исследуйте тип и устойчивость точки $r = 0$, существование ПЦ и их устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)^2(r^2-4)(r^2-16) = F(r) \\ \dot{\phi} = 1 \end{cases}.$$

Решение. Приравнявая \dot{r} к нулю, найдем $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$ ($r < 0$ не подходят). Кривая $r = const > 0$ является окружностью. Поэтому на плоскости (x, y) есть три ЗФТ – окружности с радиусами 1, 2, и 4 (рис. 13). Расставим в каждой из четырех областей, образовавшихся на плоскости x, y , знаки функции $F(r)$. Там где $F(r) > 0$, r будет возрастать. Таким образом, СР O – неустойчивый фокус, ПЦ радиуса $r=1$ неустойчив (полуустойчив), радиуса $r=2$ – устойчив, радиуса $r=4$ – неустойчив. ДС негрубая.

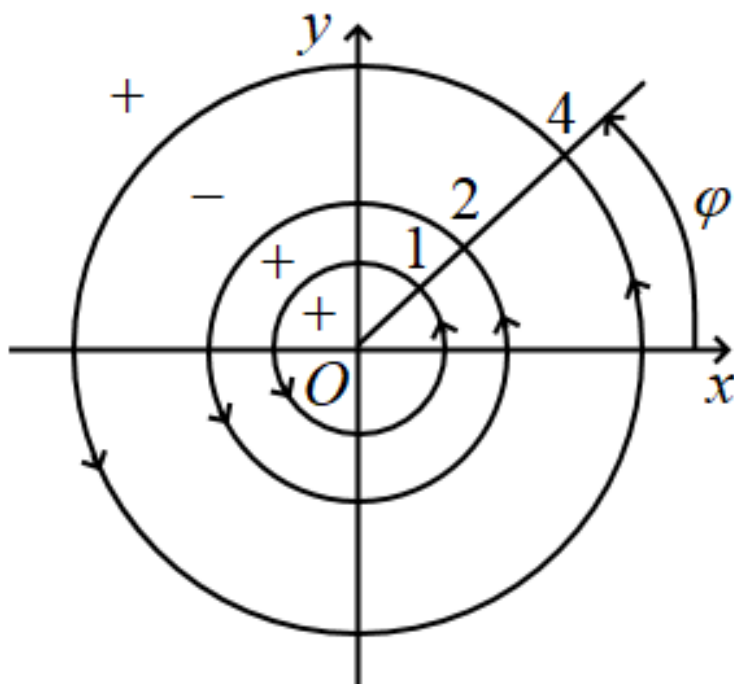


Рис. 13

2.4. Задачи для самостоятельной работы

3. $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)x_1, \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)x_2.$

Докажите, что в области $x_1 \cdot x_2 > 0$ эта система не имеет ЗФТ, если $f'_{x_1} \cdot f'_{x_2} > 0.$

4. Докажите отсутствие ЗФТ в области $y_1 \cdot y_2 > 0$ для системы

$$\dot{y}_1 = y_1 f_1(y_1) - \beta_1 y_1 - \gamma_1 y_1 y_2, \quad \dot{y}_2 = y_2 f_2(y_2) - \beta_2 y_2 - \gamma_2 y_1 y_2,$$

где f_1 и f_2 – монотонные функции, а $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – постоянные.

5. С помощью критерия Дюлака докажите, что система не имеет ЗФТ в области $1+x > 0, 1+y > 0.$

$$\dot{x} = -a_1 x(1+x) + b_1(y-x), \quad \dot{y} = -a_2 y(1+y) + b_2(x-y),$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – одного знака.

6. Докажите отсутствие ЗФТ для линейного осциллятора.

$$7. \quad \dot{x}_1 = \frac{\alpha_1 x_1}{1 + \alpha(x_1 + x_2)} - x_1, \quad \dot{x}_2 = \frac{\alpha_2 x_2}{1 + \alpha(x_1 + x_2)} + x_1 - \beta x_2.$$

Докажите, что в области $x_1 > 0, x_2 > 0$ отсутствуют ЗФТ при $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$

8. $\dot{x} = f(x) + b_1(y-x), \dot{y} = \varphi(y) + b_2(x-y), f(0) = \varphi(0) = 0, b_1 b_2 > 0.$

Существуют ли ЗФТ, охватывающие начало координат?

9. $\dot{x} = x(x+ay+b), \dot{y} = y(ax+y+\beta).$ Существуют ли периодические решения в области $xy > 0$?

10. $\dot{x} = -xf(x) + y, \dot{y} = y[a - f(x)].$ Существуют ли ЗФТ при $x > 0, y > 0,$ если $f(x)$ – монотонно возрастает при $x > 0$?

В следующих системах исследуйте типы СР и решите вопрос о существовании ЗФТ.

11. $\ddot{x} + R(x)\dot{x} + f(x) = 0, R(x) > 0$ при всех $x, f(0) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0.$

12. $\dot{x} = -y(1+x), \dot{y} = x-by, b = \text{const} \neq 0.$ Докажите, что в полуплоскости $1+x > 0$ нет ЗФТ.

13. $\dot{x}_1 = k_1 x_1 - k_3 x_1 x_2, \dot{x}_2 = -k_2 x_2 + k_4 x_1 x_2$

a) $k_i (i=1,2,3,4) > 0;$

b) $k_2 < 0, k_4 < 0, k_1 > 0, k_3 > 0.$

Существование периодических решений исследовать лишь в случае b).

14. $\dot{x} = x(a-bx-y), \dot{y} = y(x-1), 0 < a < b.$

15. $\dot{x} = x(a-bx-y), \dot{y} = y(x-1), a > b > 0.$

16. $\dot{x}_1 = [k_1(A-x_1) - k_2 x_2]x_1, \dot{x}_2 = -k_3 x_2 + k_4 x_1 x_2, A, k_i > 0, i=1,2,3,4.$

17. $\dot{x} = \frac{x}{2} - \frac{xy}{\alpha+x} - \beta x^2, \dot{y} = \frac{xy}{\alpha+x} - \frac{y}{2}, \alpha > 0, \beta > 0, 2\alpha\beta > 1.$

18. $\dot{x} = (ax - by)(1 + x)$, $\dot{y} = x - y$, $a > b > 0$.

19. $b\dot{x} = -y$, $\dot{y} = -ay + e^x - 1$, $b \neq 0$.

20. $\dot{x} = x + b(e^y - \cos y)$, $\dot{y} = 3x - 2y - \sin y - x^3$. Исследуйте только тип СР $x = y = 0$ и существования ЗФТ.

21. $\dot{x} = 1 - xy$, $\dot{y} = py(x - \frac{1+q}{q+y})$, $q > 0$. Существование периодических решений исследуйте при $p < 0$.

22. $\dot{x}_1 = ax_1 + \sin x_2 - a$, $\dot{x}_2 = \text{sh}(x_1 - 1)$.

23. $\dot{x} = (y - 1)x$, $\dot{y} = ax + y + y^2$.

24. $\dot{x} = -\alpha y + \beta y(x^2 + y^2) - x$, $\dot{y} = \alpha x - \beta x(x^2 + y^2) - y + \gamma$. Докажите, что эта система предельно ограничена и не имеет периодических решений.

Для систем, заданных в полярных координатах, исследуйте существование предельных циклов, их устойчивость, тип и устойчивость точки $r = 0$.

25. $\dot{r} = r(2 - r^2)$, $\dot{\phi} = 1$.

26. $\dot{r} = r(r + 1)(r - 2)(r - 3)$, $\dot{\phi} = -1$.

27. $\dot{r} = r(1 - r)^3(r^2 - 4)(2 - r^4)$, $\dot{\phi} = 0,5$.

28. $\dot{r} = \sin 2r$, $\dot{\phi} = 1$.

29. $\dot{r} = r[\sqrt{(r-1)^2 - \sqrt{(2-r)^2 - 2r + 3}} - 2r + 3]$, $\dot{\phi} = 2$.

30. $\dot{r} = r \sin \frac{1}{r}$, $\dot{\phi} = 1$, $\dot{r} = 0$ при $r = 0$.

31. При каких условиях система $\dot{r} = F(r)$, $\dot{\phi} = 1$, где функция $F(r)$ непрерывна, имеет ПЦ? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив?

3. Простейшие консервативные системы в механике

3.1. Определение консервативных систем и первый интеграл

Консервативными называют механические системы, движение которых характеризуется постоянством во времени полной энергии $E = H = T + V$, где T и V – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы. Иначе говоря, уравнения движения таких систем допускают первый интеграл (интеграл энергии) $H = h$, где h – постоянная энергии, зависящая от начальных условий. В любой реальной ДС энергия рассеивается. Рассеяние (диссипация) энергии обычно происходит в связи с наличием того или иного вида трения. Однако в некоторых консервативных случаях рассеяние энергии бывает настолько малым, что им можно пренебречь, если ограничиться относительно непродолжительным отрезком времени. В этом случае справедливо консервативное приближение. Простейшая нелинейная консервативная система описывается уравнением

$$\ddot{x} = f(x). \quad (11)$$

Примером такой системы служит математический маятник

$$ml^2\ddot{x} + mgl \sin x = 0.$$

Представим уравнение маятника в виде (11)

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x,$$

где x – отклонение маятника от вертикали.

Будем считать, что $f(x) \in C^\infty$, $x \in \mathbb{R}$, тогда от (11) перейдем к форме Коши.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}. \quad (12)$$

Первый интеграл системы (12) таков:

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h,$$

где $V(x) = -\int_0^x f(x) dx$.

В СР $x = x_i$, $y = 0$ (x_i – корень уравнения $f(x) = 0$) потенциальная энергия $V(x)$ имеет экстремум.

В окрестности минимума потенциальной энергии $V(x)$ интегральные кривые замкнуты (особая точка типа центр). Если в СР функция $V(x)$ имеет максимум, то получаем седловую особую точку. Если в СР функция $V(x)$ имеет точку перегиба, то СР неустойчиво (точка возврата). Замкнутые фазовые

траектории (ЗФТ) в консервативных системах являются неизолрованными и сплошь заполняют определенные области фазовой плоскости. Если функция $V(x)$ задана, то может быть построен весь фазовый портрет ДС [3]. Конечно можно строить ФП консервативных систем и общими методами построениями ФП динамических систем, однако проще строить их через функцию $V(x)$.

3.2. Задачи

Задача 8. Постройте ФП системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ a\dot{y} = \frac{b-x}{x+1}, \quad a > 0, \quad b > 0 \end{cases} \quad (13)$$

в области $1+x > 0$.

Решение. Система (13) – консервативная система типа $\ddot{x} = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{a} \frac{b-x}{x+1}$. СР $x=b, y=0$ единственное. В точке $x=b, y=0$ $V(x)$ достигает минимума. График функции $V(x)$ и ФП системы (13) представлен на рис. 14.

Задача 9. На рис. 15 представлена потенциальная энергия $V(x)$ консервативной системы $\ddot{x} = f(x)$. Постройте ФП этой системы.

Исследуемая система имеет два седла, центр и точку возврата. ФП представлен на рис. 15. Значения $h = h_1$ и $h = h_2$ отвечает сепаратрисам седел. При начальных условиях, соответствующих точкам внутри области I , устанавливаются периодические колебания. Система негрубая, так как имеется сепаратриса, идущая из седла в седло.

Если теперь учесть (пусть небольшое) вязкое трение (диссипативная система $\ddot{x} + \delta\dot{x} + f(x) = 0, \delta > 0$), то седла останутся седлами (однако сепаратрисы уже не идут из седла в седло), а ЗФТ при слабом трении (δ мало) переходят в спирали (особая точка – фокус), а при сильном трении (δ велико) – в траектории, которые входят в особые точки в определенных направлениях либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$ (особая точка – узел).

Например, если ФП консервативной системы имеет вид, изображенный на рис. 16, то ФП неконсервативных систем представлены на рис. 17 при слабом трении и на рис. 18 при сильном трении.

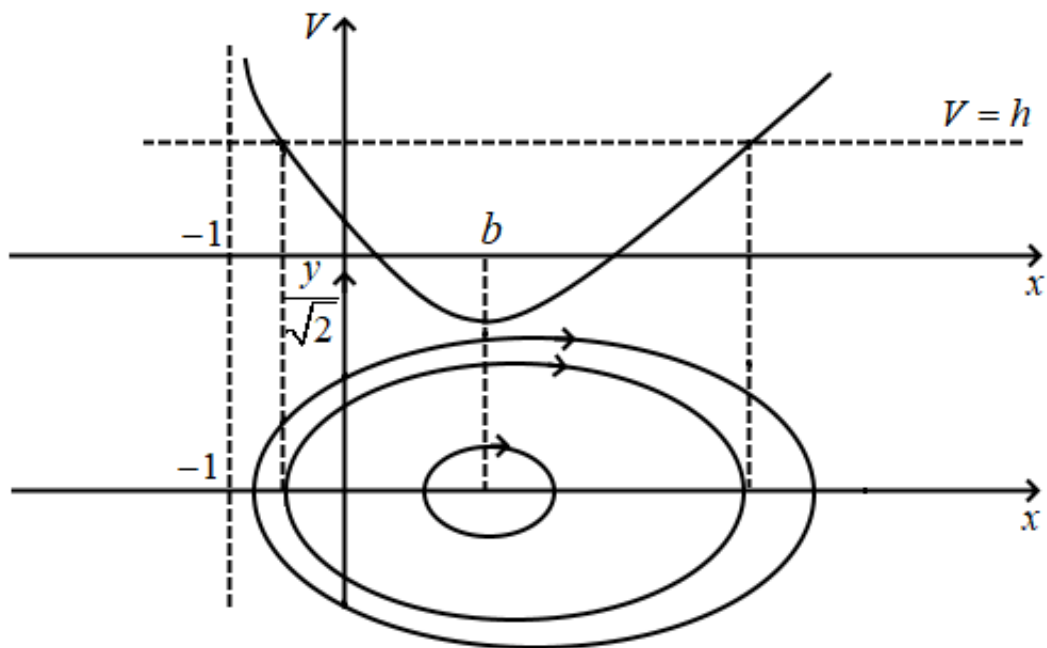


Рис. 14

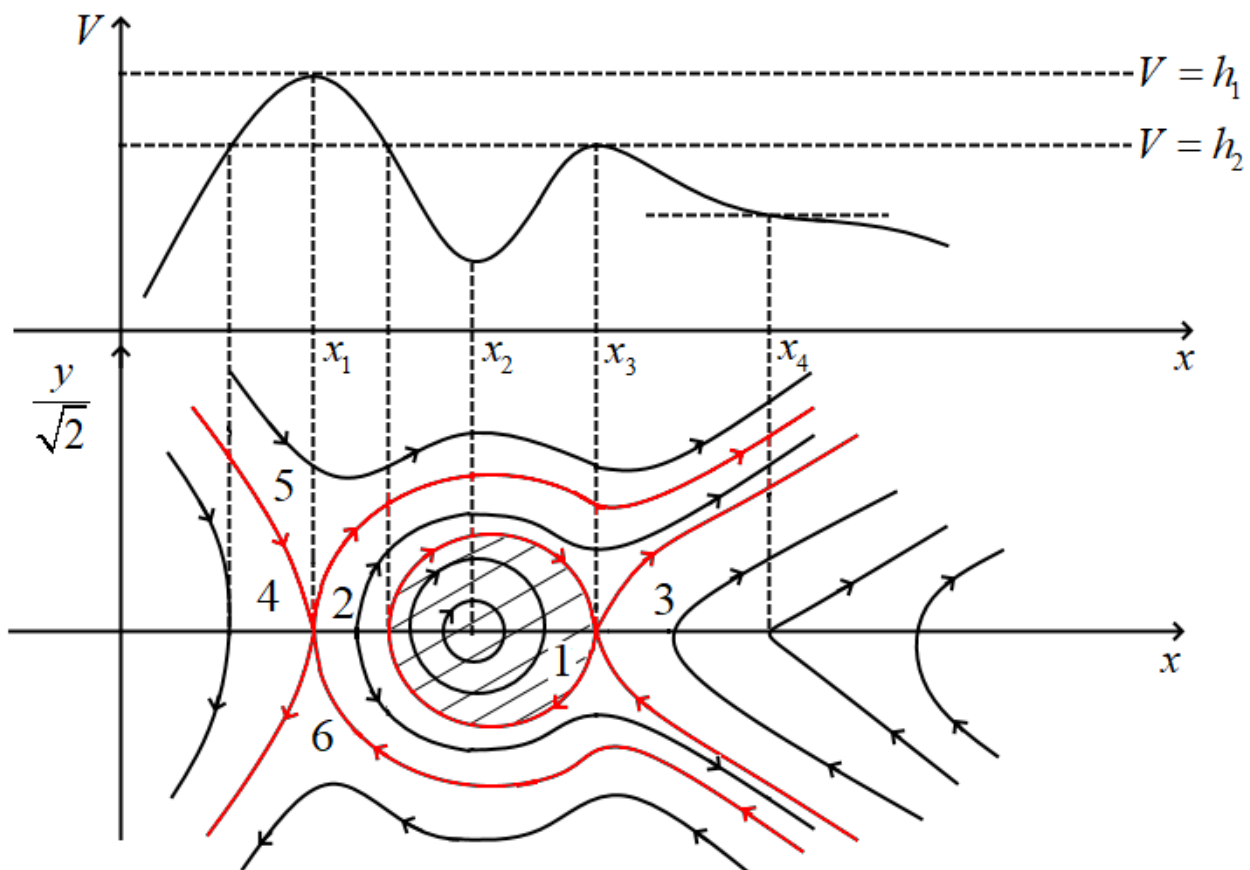


Рис. 15

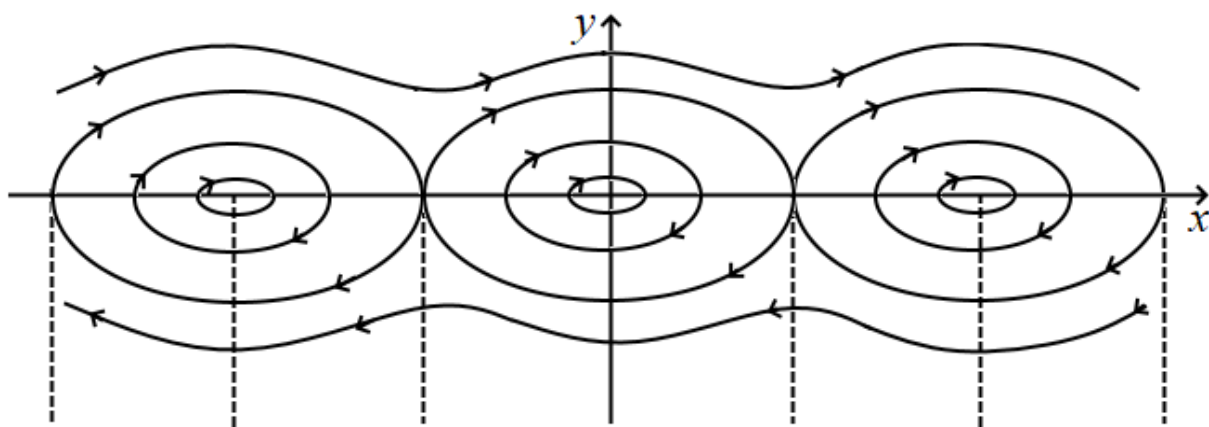


Рис. 16

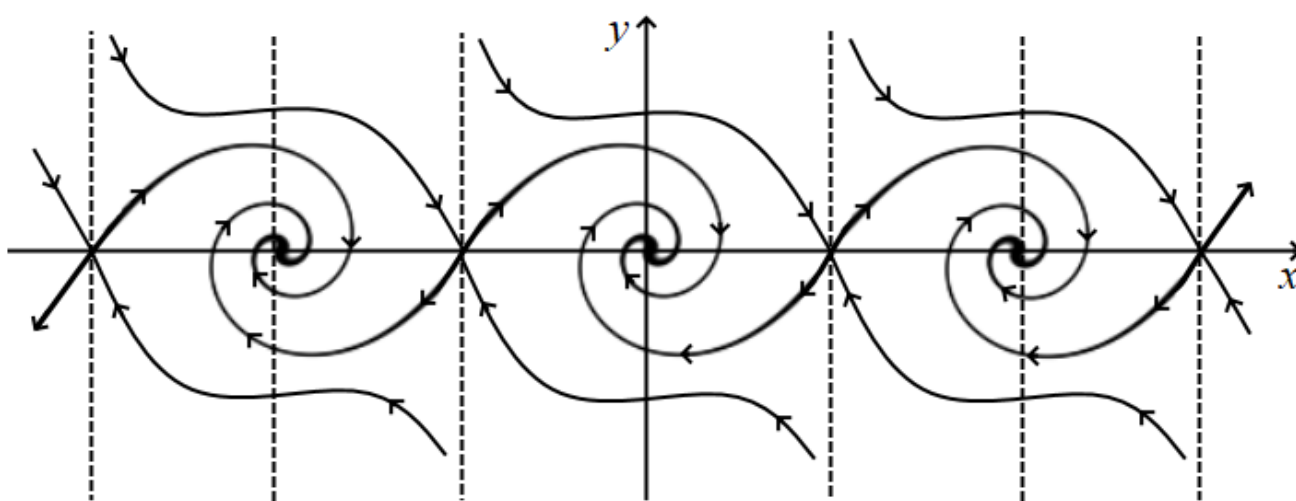


Рис. 17

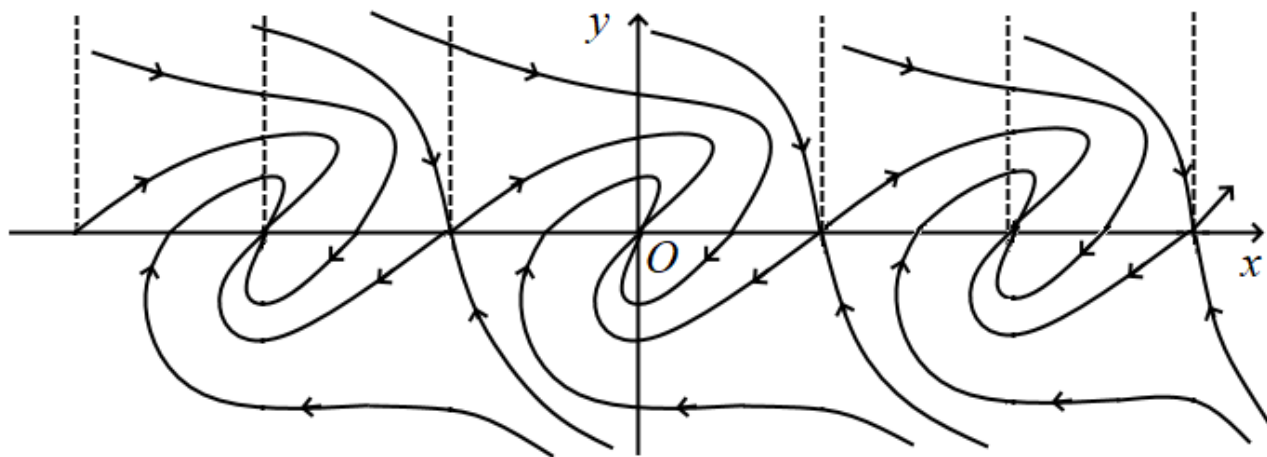


Рис. 18

В диссипативных ДС любое движение стремится к одному из устойчивых СР при $t \rightarrow \infty$, то есть в таких системах отсутствуют периодические колебания (нет ЗФТ) и неограниченно нарастающие движения (нет фазовых траекторий, уходящих в бесконечность при $t \rightarrow \infty$). Диссипативность механических или электрических систем означает, что полная энергия системы с течением времени убывает из-за действия неконсервативных сил. Часто вопрос о диссипативности системы удастся решить, доказав отсутствие в ее фазовом портрете замкнутых траекторий и траекторий, уходящих в бесконечность [3].

3.3. Задачи для самостоятельной работы

32. Постройте ФП обычного (математического) маятника в пренебрежении трением (рис. 19).
33. На рис. 20 представлена потенциальная энергия системы, описываемой уравнением $\ddot{x} = f(x)$. Постройте ФП этой системы.
34. На рис. 21 представлена потенциальная энергия системы, описываемой уравнениями $\dot{x} = y$; $\dot{y} = f(x)$. Постройте ФП ее.
35. $\ddot{x} + 2a\dot{x} + 2\sin x = 0$, $a = \text{const}$.
 1. Выясните тип и устойчивость СР $x = 0$, $\dot{x} = 0$ и $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ при $a \neq 0$.
 2. Существуют ли ЗФТ при $a \neq 0$?
 3. Постройте ФП системы при $a = 0$.
36. Постройте ФП системы $\ddot{x} = f(x)$. График функции $f(x)$ дан на рис. 22.
37. Рассмотрите одномерные колебания груза единичной массы на пружине с нелинейной восстанавливающей силой $f(x) = -2x + 4ax^3$ в пренебрежении трением. Постройте ФП системы для жесткой ($a < 0$) и мягкой ($a > 0$) пружин.
38. $\dot{x}_1 = x_1^2 e^{x_2} - x_1 \cos x_2 + ax_2$, $\dot{x}_2 = \sin x_2 - 2x_1 e^{x_2} + ax_2$.
 1. Исследуйте тип и устойчивость точки $x_1 = x_2 = 0$.
 2. Существуют ли ЗФТ при $a \neq 0$?
 3. Докажите, что при $a = 0$ система консервативна (попытайтесь найти первый интеграл).

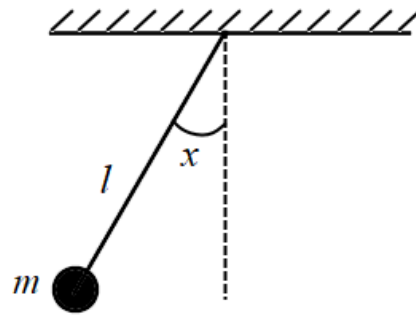


Рис. 19

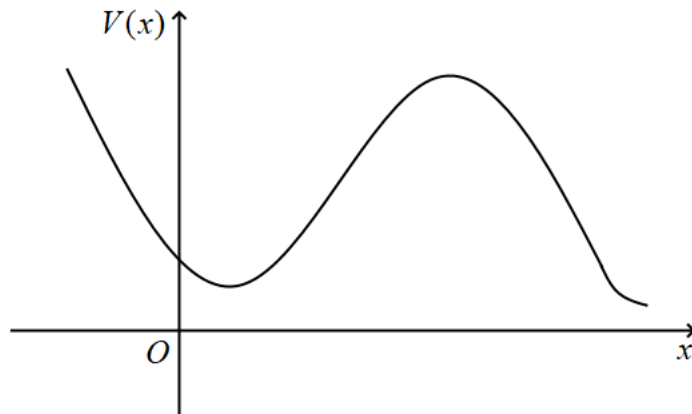


Рис. 20

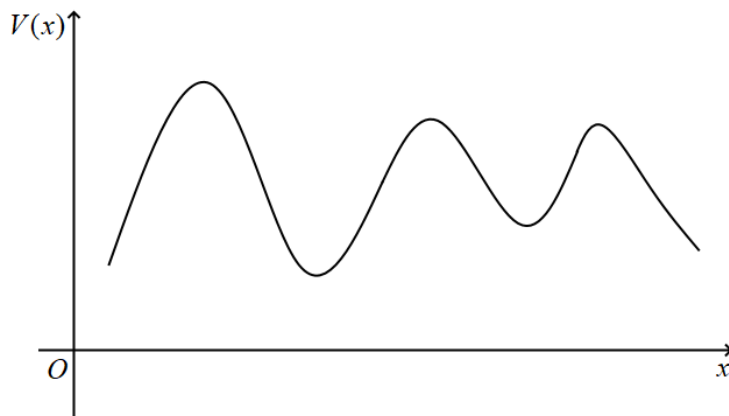


Рис. 21

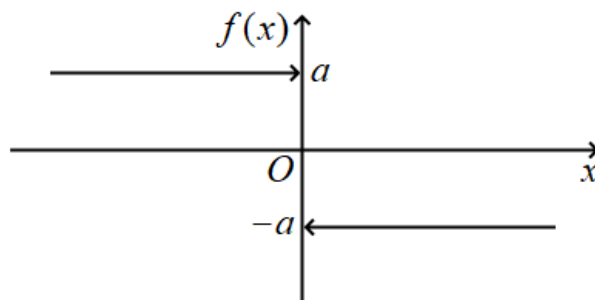


Рис. 22

4. Автоколебательные системы

4.1. Определение автоколебаний

Автоколебания – это незатухающие колебания, которые могут существовать в нелинейной колебательной системе при отсутствии переменного внешнего воздействия. При этом амплитуда и период колебаний определяются свойствами самой системы. Этим автоколебания отличаются от вынужденных колебаний, амплитуда и период которых определяются характером внешнего воздействия. В отличие от параметрических колебаний возникновение автоколебаний не связано с периодическим изменением параметров системы. Автоколебания отличаются и от свободных колебаний тем, что, во-первых, свободные колебания постепенно затухают, во-вторых, их размахи зависят от начального смещения и толчка, создающего эти колебания. Примерами автоколебаний могут служить колебания часового механизма, колебания струны в смычковых или столба воздуха в духовых музыкальных инструментах, электрические колебания в ламповом генераторе, гудение телеграфных проводов, человеческая речь (а не крик!) и так далее. Системы, в которых возникают автоколебания, называются автоколебательными. Термин автоколебания был введен академиком А.А. Андроновым, а ПЦ – А. Пуанкаре.

Автоколебательные системы можно разделить на три основных элемента: 1) собственно колебательную систему; 2) постоянного источника энергии, за счет которого поддерживаются автоколебания; 3) устройства, регулирующего поступление энергии из источника в колебательную систему. В духовых инструментах продувание струи воздуха поддерживает автоколебания столба воздуха в трубе инструмента, в струнах смычковых инструментов автоколебания реализуются благодаря энергии движущейся руки артиста и специфике силы сухого трения, действующей между смычком и струной. Геометрическими образами автоколебаний являются устойчивые ПЦ. Неустойчивые ПЦ не имеют непосредственного физического содержания, однако на фазовой плоскости системы они, как и сепаратрисы седел, играют роль разделяющих кривых. В автоколебательных системах могут существовать несколько установившихся периодических процессов с различными амплитудами. Установление конкретного процесса зависит от того, в какой области притяжения находятся начальные условия.

4.2. Задача

Задача 10. Докажите, что система $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$ автоколебательная, если: 1) $f(0,0) < 0$; 2) $f(x, y) > 0$ при $x^2 + y^2 > r^2$.

Решение. Перейдем от уравнения к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - f(x, y)y \end{cases} \quad (14)$$

Единственным СР $x = y = 0$ является неустойчивым фокусом или узлом, это видно из характеристического уравнения $\lambda^2 + f(0,0)\lambda + 1 = 0$. Далее, выберем функцию $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, тогда $\dot{V}_{(14)} = -f(x, y)y^2$. Очевидно, что $\dot{V}_{(14)} \leq 0$ при $x^2 + y^2 > R^2 \geq r^2$, то есть фазовые траектории системы (14) пересекают окружность $x^2 + y^2 = R^2$ только в направлении снаружи внутрь. Следовательно, внутри этой окружности лежит по крайней мере один устойчивый ПЦ.

4.3. Задачи для самостоятельной работы

39. Даны три системы (рис. 23 – 25). В каких из этих систем возможны автоколебания?

- Материальная точка движется без трения по параболе, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz (рис. 23).
- Камера заполнена воздухом 1 и закрыта поршнем 2, который может перемещаться вдоль оси x (рис. 24). Между стенками камеры 1 и поршнем действует сила трения.
- Шкив 1 перемещается с постоянной скоростью, обусловленной вращением валов. Груз 2 скреплен с неподвижной стенкой пружиной 3 (рис. 25). Между шкивом и грузом действует сила сухого трения.

40. Студент раскачивает студентку на качелях, поддерживая незатухающие колебания толчками в нужные моменты времени. Является ли эта система автоколебательной?

41. Докажите, что ДС, описываемая уравнением $\ddot{x} + h\dot{x} + f(x) = 0$, где $f(0) = 0$; $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$, $h = \text{const}$, не является автоколебательной. Более того, решение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

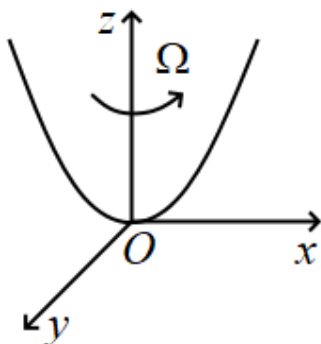


Рис. 23

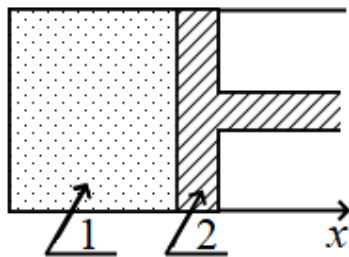


Рис. 24

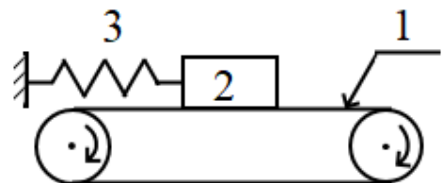


Рис. 25

Являются ли данные системы автоколебательными?

42. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - (1 + x^2 + x^4).$

43. $\dot{x} = x^2 + y^2 - 1, \dot{y} = x + y - xy - 2.$

44. $\dot{x} = by, \dot{y} = a(1 + cx^2y), b \neq 0, a \neq 0.$

45. $\dot{x} = \sin x \sin y - 1, 2, \dot{y} = 1 - x^2 + y^2 + 2xy.$

46. $\dot{x} = x^3 + y^3, \dot{y} = e^{x+y} + 0,3.$

47. Докажите, что система $\dot{x} = -2xy, \dot{y} = 1 + y - x^2 + y^2$ не автоколебательная.

48. Докажите, что у системы $\dot{x} = x(y + \frac{3}{2}), \dot{y} = x + y - 2y^2$ нет ПЦ.

49. Докажите, что система $\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - ay, \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + ax + A$ не может иметь более одного ПЦ

50. Докажите, что система, описываемая уравнением Релея $\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + q = 0$ ($b_1 > 0, b_3 > 0$), автоколебательная.

5. Качественное построение фазовых портретов конкретных динамических систем второго порядка

При построении фазовых портретов ДС второго порядка достаточно знать поведение только особых траекторий: особых точек, ПЦ и сепаратрис седел. Эти особые траектории разбивают фазовую плоскость на конечное число ячеек (в случае аналитичности правых частей системы (1)), границы которых состоят из особых траекторий, а все ячейки заполнены неособыми траекториями с качественно одинаковым поведением. Если внутри ячейки есть хотя бы одна замкнутая траектория, то все траектории этой ячейки замкнуты. Если же траектории, находящиеся в некоторой ячейке, не замкнуты, то они имеют одни и те же предельные множества. Оказывается, что если известны все СР, ПЦ и их устойчивость, а также расположение сепаратрис седел, то это позволяет установить структуру всех ячеек и их взаимное расположение, а значит, построить фазовый портрет системы.

Построение фазовых портретов для систем типа (1) опирается на методы и приемы, изложенные в учебно-методической литературе [3,5] и в настоящей работе. Для более глубокого знакомства с качественными методами и построением ФП конкретных систем следует обратиться, например, к литературе [4, 6, 7].

5.1. Задачи

Рассмотрим несколько примеров построения фазовых портретов ДС.

Задача 11. Постройте ФП системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x - a(x^2 + y^2)x \\ \dot{y} = x + y - a(x^2 + y^2)y \end{cases} \quad (15)$$

Решение. Система (15) имеет единственное положение равновесия $x = y = 0$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы $(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$. Значит, СР $(0,0)$ неустойчивый фокус. Возьмем положительно

определенную функцию $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Имеем

$\dot{V}_{(15)} = (x^2 + y^2)[1 - a(x^2 + y^2)]$. Из геометрической интерпретации знакоопределенных функций и теорем второго метода Ляпунова и Пуанкаре о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений следует, что при $a < 0$ фазовый портрет системы (15) таков, как на рис. 26, а при $a > 0$ – как на рис. 27. При $a > 0$ система (15) автоколебательная и предельно ограниченная. Уравнение ПЦ $x^2 + y^2 = \frac{1}{a}$.

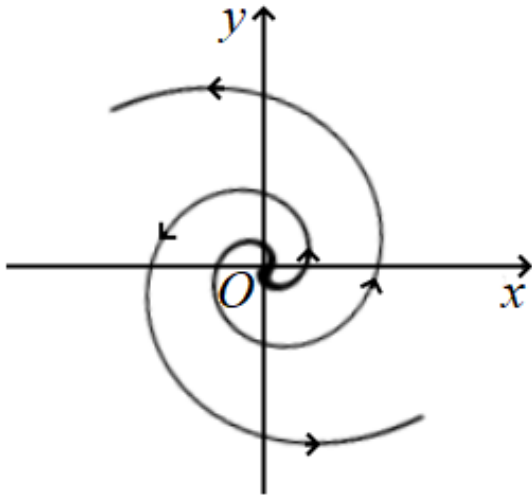


Рис. 26

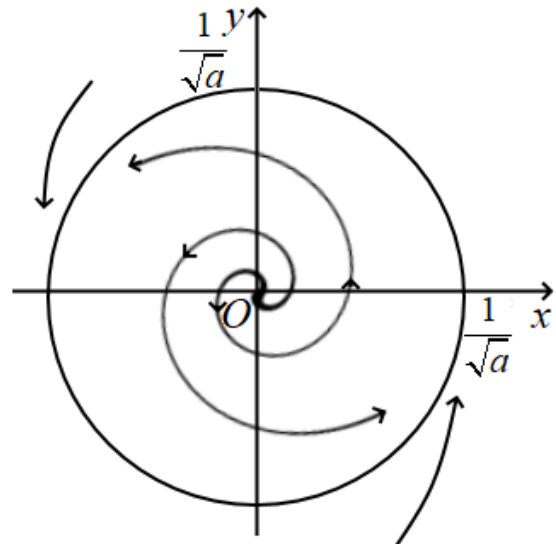


Рис. 27

Перейдя к полярной системе координат, получите тот же результат.

Задача 12. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x - by)x \\ \dot{y} = (1 - y - 3x)y \end{cases}, \quad b > 1. \quad (16)$$

1. Найдите СР этой системы, исследуйте их типы и устойчивость.
2. Существуют ли ЗФТ?
3. Постройте ФП системы в области $x \geq 0, y \geq 0$.

Решение. СР – точки $O_1(0,0), O_2(0,1), O_3(1,0), O_4(x_4, y_4)$, где $x_4 = \frac{b-1}{3b-1} > 0, y_4 = \frac{2}{3b-1} > 0$. Для O_1 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$, следовательно, O_1 – неустойчивый узел. Для O_2 : $\lambda_1 = 1 - b < 0, \lambda_2 = -1$. Значит, O_2 – устойчивый узел. Для O_3 : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Следовательно, O_3 – устойчивый узел. Для O_4 характеристическое уравнение таково: $\lambda^2 + (x_4 + y_4)\lambda + x_4 y_4 (1 - 3b) = 0$. Свободный член отрицателен, значит O_4 – седло.

Непосредственно из уравнений видно, что оси координат состоят из фазовых траекторий системы (16), поэтому ЗФТ могли бы целиком располагаться в каком-либо квадранте плоскости (x, y) , но в первом квадранте – только седловая особая точка, а в трех других квадрантов вообще нет особых точек. Следовательно, по теории индексов нет ЗФТ. Ни одна фазовая траектория не уходит в бесконечность, поскольку $\dot{x} < 0$ и $\dot{y} < 0$, если x и (или) y достаточно велики, что непосредственно следует из уравнений (16).

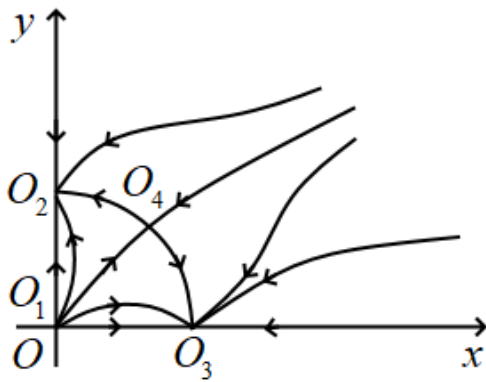


Рис. 28

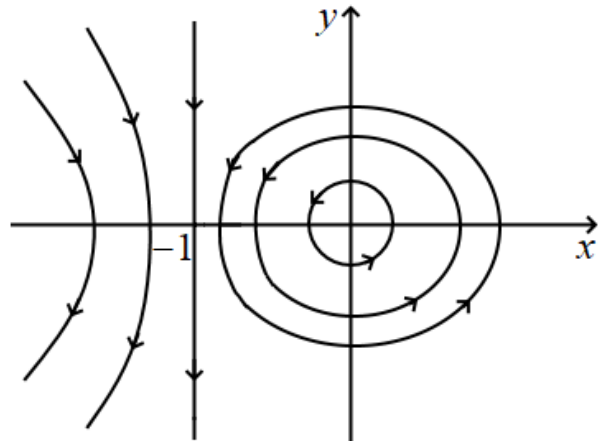


Рис. 29

Этих результатов достаточно для однозначного определения поведения сепаратрис седла O_4 и полного качественного построения ФП системы (рис. 28)

Задача 13. Постройте ФП системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) \\ \dot{y} = x \end{cases}. \quad (17)$$

Решение. СР $(0,0)$ единственное. Вертикаль $x = -1$ – фазовая траектория системы (17), по которой в соответствии с уравнением $\dot{y} = -1$ изображающая точка движется сверху вниз. Так как слева от вертикали $x = -1$ нет особых точек, то фазовые траектории там незамкнуты (по теории индексов). Ось абсцисс является изоклиной вертикальных касательных, а ось ординат – горизонтальных.

Изучим фазовые траектории при $x > -1$. Из (17) имеем $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{(1+x)y}$

или $ydy + \frac{xdx}{1+x} = 0$. Отсюда находим аналитический первый интеграл системы (17) в области $1+x > 0$

$$\frac{y^2}{2} + x - \ln(1+x) = \text{const}. \quad (18)$$

Кривые (18) замкнуты. Итак, система (17) консервативная с единственным СР типа центр. ФП показан на рис. 29.

Задача 14. $\ddot{x} + \dot{x}(3x^2 + \dot{x}^2 - 1) + x = 0$. Постройте ФП этой системы.

Решение. Перейдем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \equiv P \\ \dot{y} = -x + y(1 - 3x^2 - y^2) \equiv Q \end{cases} \quad (19)$$

Система (19) имеет единственное СР $O(0,0)$. Оно является неустойчивым фокусом, что следует из характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Выберем $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Тогда $\dot{V}_{(19)} = y^2(1 - 3x^2 - y^2)$. Очевидно, что $\dot{V}_{(19)} < 0$, если сумма $x^2 + y^2$ велика и $\dot{V}_{(19)} = 0$ только в точках оси абсцисс. Геометрически это означает, что окружность $x^2 + y^2 = R^2$, где R – достаточно большое число, пересекается фазовыми траекториями в направлении снаружи внутрь, и касание происходит только там где $y = 0$ (рис. 30).

Из решения следует, что внутри окружности $x^2 + y^2 = R^2$ находится по крайней мере один устойчивый ПЦ. Согласно критерию Бендиксона имеем $D = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 - 3x^2 - 3y^2$. Значит, внутри окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ нет ПЦ ($D > 0$). Рассмотрим кольцевую область, внутренней границей которой служит окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а внешней – окружность $x^2 + y^2 = R^2$ большого радиуса R . В этой области всюду $D < 0$ и, следовательно, по критерию Дюлака в ней существует не более одного ПЦ. Но существование хотя бы одного ПЦ уже доказано. Итак, имеется *единственный* устойчивый ПЦ, охватывающий окружность $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$. ФП приведен на рис. 31.

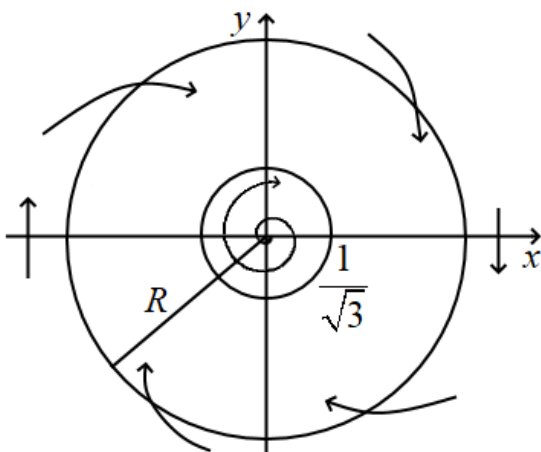


Рис. 30

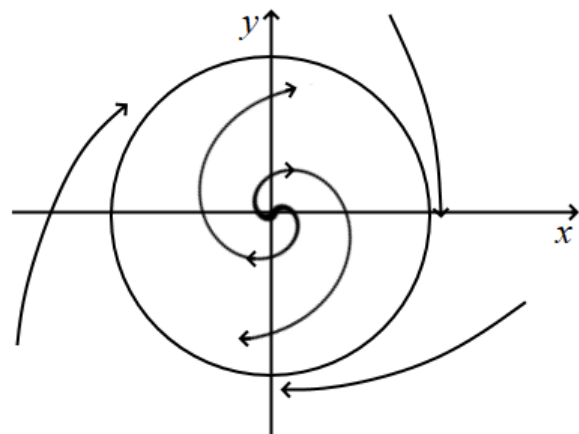


Рис. 31

Задача 15. Постройте ФП следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1(x_2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_1x_2(x_1 + 1) \end{cases} \quad (20)$$

Решение. Система (20) имеет изолированное СР $P(-1,1)$ и неизолрированное СР – ось ординат ($x_1 = 0$). Характеристическое уравнение для $P(-1,1)$: $\lambda^2 - 4 = 0$, то есть точка P – седло. Поле направлений, построенного по анализу знаков \dot{x}_1 и \dot{x}_2 непосредственно из уравнений (20), приведено на рис. 32. Ось абсцисс ($x_2 = 0$) состоит из фазовых траекторий системы (20). ФП представлен на рис. 33 (крестиком обозначено неустойчивое СР, а кружочком – устойчивое).

Задача 16. Поведение простейшей дисковой динамомшины описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + xy \\ \dot{y} = 1 - \nu y - x^2 \end{cases} \quad (21)$$

в которой x – выходной ток машины, y – угловая скорость вращающегося диска; μ и ν – положительные параметры [8]. Постройте ФП системы (21).

Решение. СР таковы: $P_1(0, \frac{1}{\nu})$, $P_2(\sqrt{1 - \nu\mu}, \mu)$, $P_3(-\sqrt{1 - \nu\mu}, \mu)$. Очевидно, что P_2 и P_3 существуют только при $\mu\nu < 1$. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda(\mu + \nu - y_i) + \nu(\mu - y_i) + 2x_i^2 = 0, \quad (22)$$

где x_i , y_i – координаты точки P_i ($i = 1, 2, 3$).

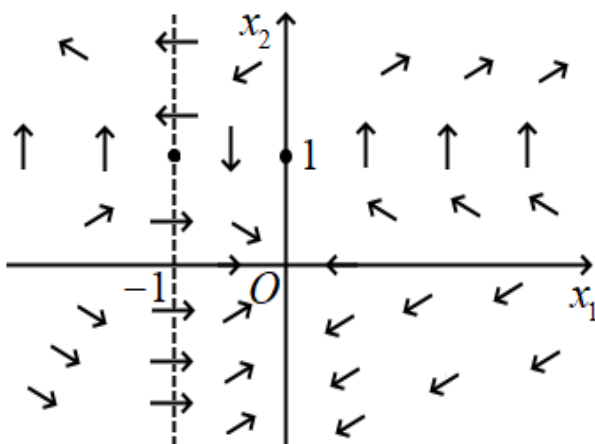


Рис. 32

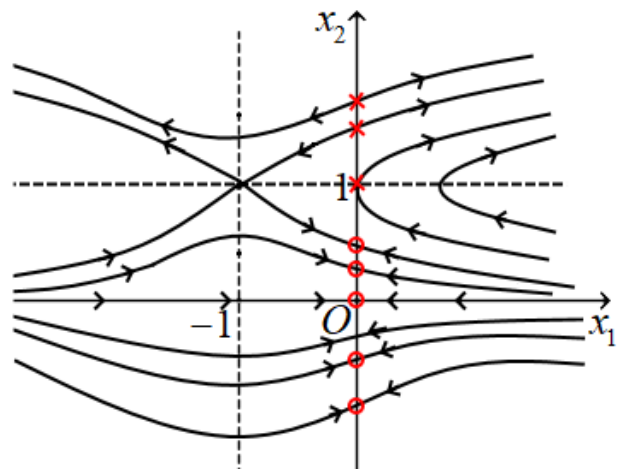


Рис. 33

а) Пусть $\mu\nu > 1$. СР P_2 и P_3 не существуют, а для точки P_1 имеем:
 $\sigma = \mu + \nu - y_i = \nu + \frac{\mu\nu - 1}{\nu} > 0$, $\Delta = \nu(\mu - y_i) + 2x_i^2 = \mu\nu - 1 > 0$ (следует из плоскости $\sigma - \Delta$ [1]), то есть P_1 – устойчивый узел, так как корни уравнения (22) ($\lambda_1 = -\nu$, $\lambda_2 = -\frac{\mu\nu - 1}{\nu}$) действительны и отрицательны.

б) Пусть $\mu\nu < 1$. Для P_1 имеем $\Delta = \mu\nu - 1 < 0$, следовательно, P_1 – седло. Для P_2 и P_3 получим $\Delta = 2(1 - \mu\nu) > 0$, $\sigma = \nu > 0$, значит P_2 и P_3 – устойчивые узлы (или устойчивые фокусы).

Непосредственно из (21) видно, что ось $x=0$ состоит из фазовых траекторий. Это обстоятельство позволяет взять в критерии Дюлака $F = \frac{1}{x}$, что дает $D = -\frac{\nu}{x}$. Следовательно, D одного знака как при $x > 0$, так и при $x < 0$, что и доказывает отсутствие ЗФТ.

Далее горизонталь $y = \mu$ – является изоклиной вертикальных касательных, а парабола $y = \frac{1 - x^2}{\nu}$ – изоклиной горизонтальных касательных.

Проведенное исследование позволяет построить ФП системы (22) как при $\mu\nu > 1$ (рис. 34), так и при $\mu\nu < 1$ (рис. 35). Значение параметра $\mu = \frac{1}{\nu}$ является бифуркационным, когда три простых СР сливаются в одно – сложный узел.

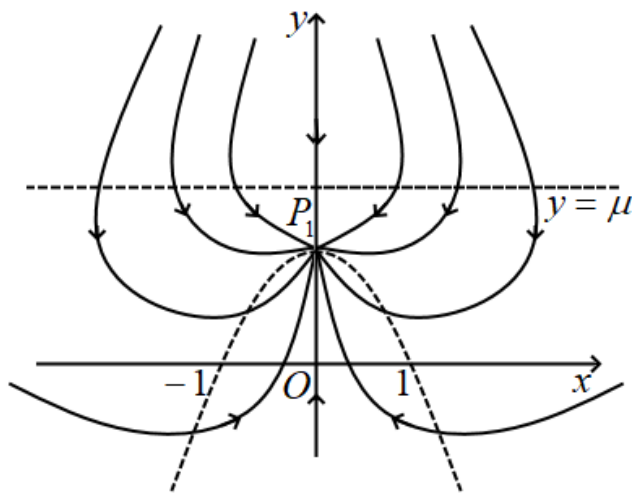


Рис. 34

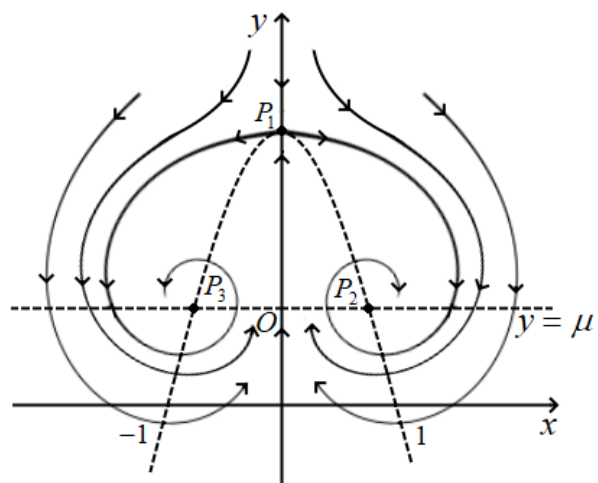


Рис. 35

Задача 17. Постройте ФП системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(a + y)(x^2 + y^2 - b) \\ \dot{y} = -x + (ay - x^2)(x^2 + y^2 - b) \end{cases}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0. \quad (23)$$

Решение. Система (23) имеет единственное СР $O(0,0)$. Корни характеристического уравнение линеаризованной системы $\lambda_{1,2} = -ab \pm i$. Если $ab > 0$, то $O(0,0)$ – устойчивый фокус. Если $ab < 0$, то $O(0,0)$ – неустойчивый фокус. Составим функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq 0$, тогда $\dot{V} = a(x^2 + y^2 - b)(x^2 + y^2)$.

а) Пусть $b > 0$. Если $a > 0$, тогда $\dot{V} \leq 0$ внутри окружности $x^2 + y^2 = b$ и $\dot{V} \geq 0$ вне её. Значит $O(0,0)$ – устойчивый фокус (рис. 36). Если $a < 0$, тогда $\dot{V} \leq 0$ вне окружности $x^2 + y^2 = b$ и $\dot{V} \geq 0$ внутри неё. Значит $O(0,0)$ – неустойчивый фокус (рис. 37).

б) Пусть $b < 0$. Тогда из системы (23) следует, что на фазовой плоскости будут только фокусы. Если $a > 0$, то $O(0,0)$ – неустойчивый фокус (рис. 38). Если $a < 0$, то $O(0,0)$ – устойчивый фокус (рис. 39).

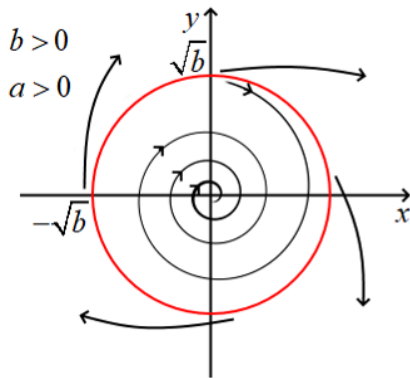


Рис. 36

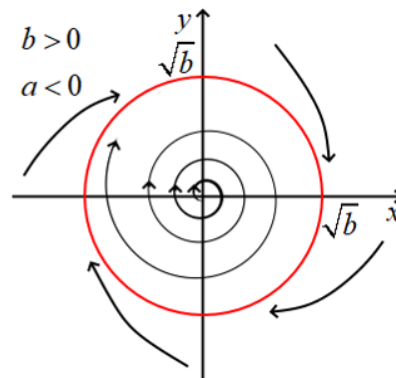


Рис. 37

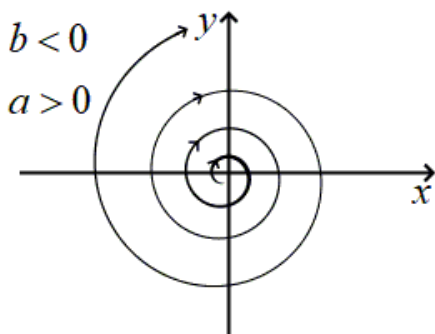


Рис. 38

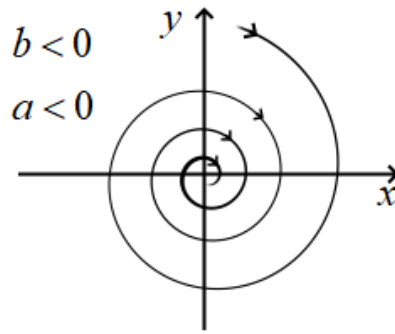


Рис. 39

5.2. Задачи для самостоятельной работы

51. $\dot{x} = (1 - x - by)x$, $\dot{y} = (1 - y - 3x)y$, $b < 1$,

- Найдите СР этой системы в области $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- Исследуйте типы и устойчивость, найденных СР.
- Существуют ли ЗФТ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- Попытайтесь построить ФП в области $x \geq 0$, $y \geq 0$.

52. $\dot{u} = u(2 - 3u - v)$, $\dot{v} = v(1 - u - v)$.

- Найдите СР. Исследуйте их типы и устойчивость.
- Попытайтесь построить ФП данной системы в первом квадранте плоскости (u, v) .

53. $\dot{u} = u(1 - u - v)$, $\dot{v} = v(2 - 4u - v)$. Для этой системы ответьте на вопросы из задачи 52.

54. $\dot{x} = x(a - bx - y)$, $\dot{y} = y(x - 1)$, $0 < a < b$

- Найдите СР, исследуйте их типы и устойчивость.
- Убедитесь, что оси координат состоят из фазовых траекторий данной системы.
- Существуют ли ЗФТ?
- Постройте ФП данной системы.

55. Постройте ФП системы $\dot{x} = x(a - bx - y)$, $\dot{y} = y(x - 1)$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, если $a > b > 0$. Сравнив ФП систем задач 54 и 55, определите бифуркационное соотношение между параметрами.

56. $\dot{x} = x(1 - y - D)$, $\dot{y} = y(x - D)$, $D > 0$, $D \neq 1$.

- Найдите СР, исследуйте их типы и устойчивость.
- Возможны ли ЗФТ в области $x > 0$, $y > 0$?
- Постройте ФП в области $x \geq 0$, $y \geq 0$.

57. $\dot{x} = \frac{a}{1+y} - x$, $\dot{y} = \frac{a}{1+x} - y$, $a = \text{const} > 0$. Постройте ФП этой системы.

58. $\dot{x} = y - x(ax^2 + y^2 - 1)$, $\dot{y} = -ax - (ax^2 + y^2 - 1)$ при $a > 0$. Проведите качественное исследование этой системы.

Постройте ФП систем в задачах 59 – 78.

59. $\ddot{x} + (\dot{x}^2 + k^2 x^2 - a^2)\dot{x} + k^2 x = 0.$

60. $\dot{x} = y^{2k-1} + \varepsilon_1[1 - a(x^{2k} + y^{2k})]x, \dot{y} = -x^{2k-1} + \varepsilon_2[1 - a(x^{2k} + y^{2k})]y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a > 0,$
 k – натуральное число ($k \neq 0$).

61. $\dot{x} = F(y) + \varepsilon_1[1 - aV(x, y)]x, \dot{y} = -G(x) + \varepsilon_2[1 - aV(x, y)]y,$

где $F(0) = G(0) = 0; yF(y) > 0,$ при $y \neq 0, xG(x) > 0,$ при $x \neq 0;$

$$V(x, y) = \int_0^x G(z)dz + \int_0^y F(z)dz.$$

62. $\dot{x} = -ax(1+x) + b_1(y-x), \dot{y} = -ay(1+y) + b_2(x-y),$ где $a, b_1, b_2 > 0$ и $b_1 + b_2 > a.$

63. $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2, \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2.$ Является ли эта системы грубой?

64. $\dot{x}_1 = x_1x_2, \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2.$

65. $\dot{x} = -2xy + a, \dot{y} = 2xy - y, a > 0$ (можно ограничиться областью $x \geq 0$).

66. $\dot{x} = y + x(\alpha + y)(x^2 + y^2 - \beta), \dot{y} = -x + (\alpha y - x^2)(x^2 + y^2 - \beta), \beta > 0.$

67. $\ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$

68. $\dot{x} = -y + \alpha x + (3x^2 + 2y^2)x, \dot{y} = x + \alpha y + (3x^2 + 2y^2)y.$

69. $\dot{x} = -xy, \dot{y} = y(x-1).$

Дополнительные вопросы к задаче 69:

а) Груба ли эта системы?

б) СР устойчивы? Асимптотически устойчивы? Неустойчивы?

70. $\dot{x} = \frac{a}{1+y} - b, \dot{y} = \alpha x - \beta, a > 0, b > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha > \beta.$ Постройте ФП этой системы в области $x \geq 0, y \geq 0$ на плоскости (x, y) или в области $y \geq 0$ на плоскости $(y, \dot{y}).$

В нижеследующих задачах параметры положительны.

71. $\ddot{q} - \omega_0^2 q + \alpha q^3 = 0.$

72. $\ddot{x} - \omega_0^2 x - \alpha x^3 = 0.$

73. $\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha q^3 = 0 (h < \omega_0).$

$$74. \ddot{z} + 2h\dot{z} + \omega_0^2 z - \alpha z^3 = 0 \quad (h < \omega_0).$$

$$75. \ddot{y} + 2h\dot{y} - \omega_0^2 y + \alpha y^3 = 0 \quad (h < \omega_0).$$

$$76. \dot{u} = -2uv, \quad \dot{v} = u^2 + v^2 - 1.$$

$$77. \dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -\sin x.$$

$$78. \dot{x} = -x - y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x - y + y(x^2 + y^2).$$

Ответы и указания

2. Рис. 3: $j = -2$, рис. 4: $j = 2$, рис. 8: $j = -1$.

$$4. F = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

$$5. F = \frac{1}{y_1 y_2}.$$

$$6. F(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

$$7. F(x_1, x_2) = \frac{1 + \alpha(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}.$$

8. Нет. Рассмотрите знаки \dot{x} при $x=0$ и \dot{y} при $y=0$.

$$9. F = \frac{1}{xy}.$$

11. $O(0,0)$ – седло, если $f'(0) < 0$, и устойчивый узел (или устойчивый фокус), если $f'(0) > 0$. Примените критерий Бендиксона.

$$12. F = \frac{1}{1+x}.$$

13. $P_1(0,0)$ – седло в случае а), неустойчивый узел в случае б). $P_2\left(\frac{k_2}{k_4}, \frac{k_1}{k_3}\right)$ –

седло в случае б), а в случае а) центр как в линеаризованной, так и в исходной системе. В нелинейной системе существует аналитический первый интеграл. По теории индексов замкнутые фазовые траектории в случае б) не существуют.

14. $P_1(0,0)$ – седло, $P_2\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ – устойчивый узел, $P_3(1, a-b)$ – седло. Оси

координат являются целыми фазовыми траекториями системы. Примените теорию индексов.

16. Сделав замену $t_n = k_3 t$, $\frac{k_4}{k_3} x_1 = x$, $\frac{k_2}{k_3} x_2 = y$, $\frac{k_1}{k_3} A = a$, $\frac{k_1}{k_4} = b$ приходим к системе $\dot{x} = x(a - bx - y)$, $\dot{y} = y(x - 1)$, которой посвящены задачи 14 и 15.
17. $P_1(0,0)$ – седло, $P_2(\frac{1}{2\beta}, 0)$ – устойчивый узел, $P_3(\alpha, \alpha(1 - 2\alpha\beta))$ – седло.
 Предельных циклов нет.
18. Нет ЗФТ.
19. По Бендиксону периодические движения отсутствуют, если $a \neq 0$. При $a = 0$ нелинейная консервативная система.
21. ЗФТ нет по теории индексов.
22. $P_1(1, 2\pi k)$ – седло. $P_2(1, \pi + 2\pi k)$ – неустойчивый узел (или фокус), если $a > 0$, и устойчивый, если $a < 0$. Воспользуйтесь критерием Бендиксона.
23. Убедитесь, что ось $x = 0$ состоит из ЗФТ, и установите также направление пересечения траекториями оси абсцисс. Далее рассмотрим области $x > 0$, $y > 0$ при $a > 0$ и $x > 0$, $y > 0$ при $a < 0$, взяв $F = \frac{1}{xy}$.
24. Взять $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
31. $F(r_0) = 0$ предельный цикл устойчив, если при переходе через точку $r = r_0$ $F(r)$ меняет знак с «+» на «-». Если смены знака нет или $F(r)$ меняет знак с «-» на «+», то цикл неустойчив.
36. Перейти к функции $V(x)$.
38. $P(0,0)$ неустойчивый узел при $a > 1$ и седло при $a < 1$. При $a = 0$ система обладает первым интегралом $x_1^2 e^{x_2} - x_1 \sin x_2 = \text{const}$.
39. В системе, приведенной на рис. 12, возможны автоколебания.
41. Выбрать $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(z) dz$ и применить теоремы Барбашина-Красовского и об асимптотической устойчивости в целом.
44. ДС не автоколебательная, так как у нее нет СР.
48. На оси Oy расположены два СР $(0,0)$ и $(0, \frac{1}{2})$, а сама ось состоит из целых фазовых траекторий. СР $(6, -\frac{3}{2})$ – седло.
50. Примените приемы, изложенные в пособии [3] на стр. 74 – 76.

51. Три СР $P_1(0,0)$ – неустойчивый узел, $P_2(0,1)$ – седло, $P_3(1,0)$ – устойчивый узел. В рассматриваемой области нет ЗФТ и ни одна фазовая траектория не уходит в бесконечность.
52. Четыре СР. При $u > 0, v > 0$ нет фазовых траекторий, уходящих в бесконечность. $F = \frac{1}{uv}$.
54. $P_1(0,0)$ – седло, $P_2(\frac{a}{b}, 0)$ – устойчивый узел, $P_3(1, a-b)$ – седло. Оси координат состоят из целых фазовых траекторий. ЗФТ нет по теории индексов.
55. $F(x, y) = \frac{1}{xy}, \frac{a}{b} = 1$ – бифуркационное соотношение между параметрами a, b .
56. $D > 1, P_1(0,0)$ – устойчивый узел, $P_2(D, 1-D)$ – седло, расположенное в первой четверти. $D < 1, P_1$ – седло, P_2 – центр в линеаризованной системе координат, и в нелинейной системе – центр.
57. Применить критерий Бендиксона, фазовые траектории в бесконечность не уходят. ФП симметричен относительно биссектрисы координатного угла.
58. $V = \frac{ax^2 + y^2}{2}$ система автоколебательная с мягким режимом возбуждения.
59. $V = \frac{1}{2}(k^2x^2 + y^2), y = \dot{x}$.
60. $V = x^{2k} + y^{2k}$. Единственное СР неустойчиво. Система автоколебательная с мягким режимом возбуждения.
61. $V(x, y) = \int_0^x G(z)dz + \int_0^y F(z)dz$. Имеется единственный устойчивый ПЦ $V(x, y) = \frac{1}{a}$ и неустойчивое СР.
62. $P_1(0,0), P_2(-1,-1), F(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)}$. Непосредственно из уравнения видно, что $y = x$ состоит из фазовых траекторий, так как

$x(t) = y(t) = u(t)$, где $u(t)$ – решение уравнения $\dot{u} = -au(1+u)$, является решением системы.

63. Система негрубая, так как есть сепаратриса, идущая из седла в седло.
65. $F = \frac{1}{y}$. СР устойчивый фокус. Ось абсцисс есть фазовая траектория системы, вертикаль $x = \frac{1}{2}$ – изоклина горизонтальных касательных, $y = \frac{a}{2x}$ – изоклина вертикальных касательных.
66. $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Два качественно разных портрета при $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$.
67. $V = x^4 + 2y^2$. Неустойчивое СР и единственный устойчивый ПЦ.
68. $V = x^2 + y^2$. При $\alpha \geq 0$ неустойчивый фокус. При $\alpha < 0$ $\dot{V} > 0$ вне эллипса $3x^2 + 2y^2 = |\alpha|$ и $\dot{V} < 0$ внутри его. Строим окружности $x^2 + y^2 = \frac{|\alpha|}{2}$ и $x^2 + y^2 = \frac{|\alpha|}{3}$, которые изнутри и извне касаются эллипса. Внутри меньшей окружности и вне большей окружности ПЦ нет, но существует, по крайней мере, один неустойчивый ПЦ, лежащий в кольце, образованном окружностями. При критерии Бендиксона для кольца доказывается его единственность.
69. Ось абсцисс – неизолированное СР. Ось ординат – фазовая траектория. Вертикаль $x = 1$ – изоклина горизонтальных касательных. Построить вначале поле направлений.
71. Два центра и седло.
72. Седло.
73. Устойчивый фокус.
74. Два седла и устойчивый фокус.
75. Два устойчивых фокуса и седло.
76. СР четыре: $O_1(-1,0)$, $O_2(1,0)$ являются центрами и в линеаризованной, и в нелинейной системах, так как уравнения фазовых траекторий симметричны относительно оси координат; $O_3(0,1)$, $O_4(0,-1)$ – седла. Ось V состоит из целых фазовых траекторий системы.

77. В силу периодичности правых частей достаточно рассмотреть поведение фазовых траекторий в квадрате $-\pi \leq x < \pi$, $-\pi \leq y < \pi$. СР $O(0,0)$, $O_1(-\pi,0)$, $O_2(-\pi,\pi)$, $O_3(0,-\pi)$. Точки – седла, – центры, так как уравнение фазовых траекторий не меняется при заменах x на $-x$, x на $x + \pi$, y на $y + \pi$.
78. Один из вариантов решения – переход к полярной системе координат.

Литература

1. Пригоровский А.Л., Сандалов В.М., Ширяева А.А. Сборник задач по теории колебаний, устойчивости движения и элементам качественной теории дифференциальных уравнений. Часть 1: Учебно-методическое пособие. – Н. Новгород: нижегородский государственный университет ННГУ, 2019.
2. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для ВУЗов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001.
3. Горяченко В.Д. Качественные методы теории колебаний. Учебное пособие. – Горький: Изд-во ГГУ, 1987.
4. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка – М.: Наука, 1966.
5. Горяченко В.Д., Сандалов В.М. Задачи по теории колебаний. Часть 1. Устойчивость состояний равновесия. – Горький: Изд-во ГГУ, 1988.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976.
8. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986.

Александр Леонидович Пригоровский
Владимир Михайлович Сандалов
Алена Александровна Ширяева

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ,
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМ
КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЧАСТЬ 2**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23